解析接続によるだ円孔を有する異方性弾性体の応力変位解析

群馬工業高等専門学校　学生会員　○三根　尭央
群馬工業高等専門学校　正会員　木村　清和

1. 緒言

現在用いられている応力，変位場を求めるための解析手法は，大きく分けて，数値解析手法と数学的な解析手法の 2 種類が存在する．

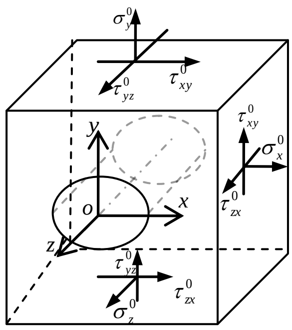
現在，工学分野では，コンピュータの発達による計算処理能力の向上に伴い，膨大な量の数値データを扱うことが比較的容易となったため，有限要素解析をはじめとする数値解析手法が主に用いられている．また，構造力学では物体を近似的に等方性として扱うが，近年工業材料として繊維補強や木材等に代表される異方性材料が用いられることが多くなっており，これらの材料について応力・変位解析を厳密に行う場合，従来の等方性弾性理論における解析に比べ，より複雑な計算を必要とする．しかし，有限要素法等にはメッシュの粗密による解の精度への影響や，メッシュの細分化による計算時間の増加などの問題があり，特に複雑な計算を必要とする異方性体の解析においては，この影響を受けやすく，解の精度や計算時間が問題となる．

一方，応力関数を用いた手法に代表される数学的解析手法は，対象モデルの抽象化や，三次元問題を二次元的に取り扱う二次元弾性論を用いる必要はあるものの，短時間で厳密な計算結果が得られ，メッシュの粗密等の影響を受けないという利点がある [1]．数学的解析手法では，異方性弾性体の解析において一般的に用いられている複素解析関数を導入し，解析解を定めることにより応力，変位を関数として表す．これまでは複素解析関数を級数と仮定し，境界条件を満足するように級数の未定係数を決定する手法が Lekhnitskii 等により一般化され用いられてきた．しかし，この方法の場合，未定係数を決定する過程で複雑な連立方程式を解く必要があった．この問題を解決するために，等方性理論においては，鏡像の原理 [2]による解析接続を適用することにより，境界条件を簡便に与え，従来よりも簡易に解を導く方法が提案されている．

そこで本研究では，鏡像の原理による解析接続を異方性弾性体に適用し，従来よりも簡易に応力関数を定める方法を提案する．

2. 解析モデル

今回の解析では，図－1 に示すように，だ円孔を有する異方性弾性体が無限遠から一様な応力を受ける問題を対象とする．なお，だ円孔の軸方向を z 軸とし，これに直交して x, y 軸の直交デカルト座標系をとることとする．



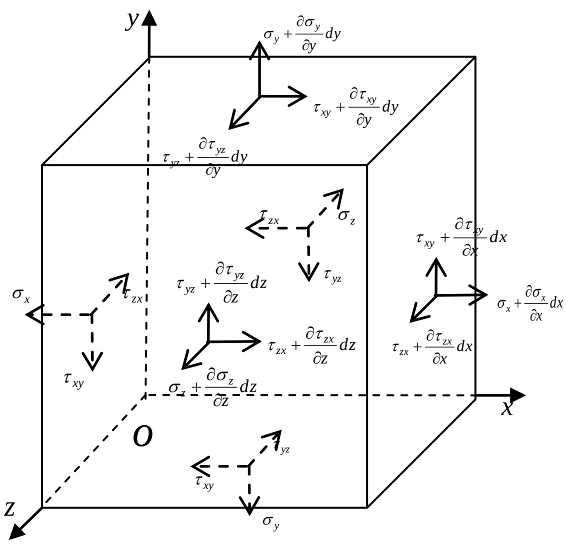
図－1 解析モデル図

3. 応力・変位の一般式の導出

3.1 基礎方程式

3.1.1 釣合方程式

図－2 に示す微小立方体要素 dx , dy , dz を仮定したときに，これに作用する応力の x , y , z 軸方向の力の釣り合いを考える．二次元弾性論では，応力成分は面内座標 x , y のみに依存するため，応力成分の z



図－2　微小要素に作用する応力

キーワード　異方性，だ円孔，応力変位解析，解析接続，複素応力関数
連絡先　〒371-8530　群馬県前橋市鳥羽町 580　群馬工業高等専門学校環境都市工学科　TEL027-254-9176
E-mail : kkimura@cvl.gunma-ct.ac.jp

に関する微分の項は恒等的に 0 となる．また，せん断応力の対称性 $\tau_{ij}=\tau_{ji}$ を考慮し，さらに物体力を無視することとすると，次の釣合方程式が導かれる．

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}=0,\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}=0. \tag{1}$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}=0 \tag{2}$$

3.1.2　幾何式と適合条件式

荷重によって生じる変形が微小である場合，幾何学式によって，変位とひずみは関係づけられる．2 次元弾性論では，各変位成分は面内座標 x , y に依存することを考慮すると，幾何式は次のように表される．なお，u , v , w はそれぞれ x , y , z 方向の変位成分を表し，ε , γ はそれぞれ直ひずみ，せん断ひずみを示す．

$$\left.\begin{aligned}&\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x},\quad \varepsilon_y=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \gamma_{xy}=\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y},\\&\gamma_{yz}=\frac{\partial w}{\partial y},\quad \gamma_{zx}=\frac{\partial w}{\partial x}.\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

また，上式より，次のひずみの適合条件を得る．

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\gamma_{xy}}{\partial x\partial y}=0,\\&\frac{\partial\gamma_{zx}}{\partial y}-\frac{\partial\gamma_{yz}}{\partial x}=0.\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

3.2　構成方程式と平面ひずみ状態

応力-ひずみの関係は異方性の場合，一般化フック則 $\varepsilon_{ij}=a_{ijkl}\sigma_{kl}$ を用いて表される．ε_{ij} はひずみテンソル，σ_{kl} は応力テンソル，a_{ijkl} は弾性コンプライアンスを示す．応力，ひずみテンソル，弾性コンプライアンスは対称性を有しており，縮退表記($\varepsilon_i=a_{ij}\sigma_j$)に書き換えることが可能である [3]．また，今回は二次元弾性論の平面ひずみ状態を仮定し，z 軸方向の垂直ひずみ $\varepsilon_z=0$ を考える．この時，応力-ひずみ関係は次式で表される [1]．

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\\varepsilon_x\\\gamma_{yz}\\\gamma_{zx}\\\gamma_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\beta_{11}&\beta_{12}&\beta_{14}&\beta_{15}&\beta_{16}\\&\beta_{22}&\beta_{24}&\beta_{25}&\beta_{26}\\&&\beta_{44}&\beta_{45}&\beta_{46}\\&&&\beta_{55}&\beta_{56}\\sym.&&&&\beta_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\sigma_x\\\sigma_y\\\tau_{yz}\\\tau_{zx}\\\tau_{xy}\end{Bmatrix} \tag{5}$$

$$\beta_{ij}=a_{ij}-\frac{a_{i3}a_{3j}}{a_{33}} \tag{6}$$

3.3　複素応力関数の導入

まず，面内変形を表す Airy の応力関数 $F(x,y)$および，面外せん断変形を表す Prandtl の応力関数 $\psi(x,y)$ を導入すると，応力は次式となる．

$$\sigma_x=\frac{\partial^2F}{\partial y^2},\quad \sigma_y=\frac{\partial^2F}{\partial x^2},\quad \tau_{xy}=-\frac{\partial^2F}{\partial x\partial y}. \tag{7}$$

$$\tau_{zx}=\frac{\partial^2\psi}{\partial y},\quad \tau_{yz}=-\frac{\partial^2\psi}{\partial x}. \tag{8}$$

これらの応力関数について，構成方程式及びひずみの適合条件を用いて整理すると次式を得る．

$$(L_4L_2-L_3{}^2)F=0,\quad (L_4L_2-L_3{}^2)\Psi=0. \tag{9}$$

$$\left.\begin{aligned}L_2&=\beta_{44}\frac{\partial^2}{\partial x^2}-2\beta_{45}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+\beta_{55}\frac{\partial^2}{\partial y^2},\\L_3&=-\beta_{24}\frac{\partial^3}{\partial x^3}+(\beta_{25}+\beta_{46})\frac{\partial^3}{\partial x\partial y^2}+\beta_{15}\frac{\partial^3}{\partial y^3},\\L_4&=\beta_{22}\frac{\partial^4}{\partial x^4}-2\beta_{26}\frac{\partial^4}{\partial x^3\partial y}+(2\beta_{12}+\beta_{66})\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2}\\&\quad-2\beta_{16}\frac{\partial^4}{\partial x\partial y^3}+\beta_{11}\frac{\partial^4}{\partial y^4}.\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

さらに式(9)の微分演算子は次のような一階の微分演算子の線形結合で表示することができる [4]．

$$D_6D_5D_4D_3D_2D_1F=0 \tag{11}$$

$$D_k=\frac{\partial}{\partial y}-\mu_k\frac{\partial}{\partial x}\quad (k=1,2,\cdots,6) \tag{12}$$

ここに，μ_k は代数方程式を解いた式(9)に対する六次の特性方程式の根である．特性根 μ_k は三組の共役複素根となることが知られている．これより F，Ψ の一般解は，複素変数 $z_k=x+\mu_k y$ の解析関数 $F_k(z_k)$を用いて表すことができる．さらにこれに対して，複素解析関数 $\phi_k(z_z)=F_k'(z_k)$ を導入するとこれより F，Ψ の一般解は次式により表される．

$$F(x,y)=2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3}F_k(z_k)=2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3}\int\phi_k(z_k)dz_k \tag{13}$$

$$\psi(x,y)=2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3}\lambda_kF_k'(z_k)=2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3}\lambda_k\phi_k(z_k) \tag{14}$$

$$\lambda_k=-\frac{l_3(\mu_k)}{l_2(\mu_k)}=-\frac{l_4(\mu_k)}{l_3(\mu_k)} \tag{15}$$

$$\left.\begin{aligned}l_2(\mu_k)&=\beta_{55}\mu_k{}^2-2\beta_{45}\mu_k+\beta_{44},\\l_3(\mu_k)&=\beta_{15}\mu_k{}^3-(\beta_{14}+\beta_{56})\mu_k{}^2\\&\quad+(\beta_{25}+\beta_{46})\mu_k-\beta_{24},\\l_4(\mu_k)&=\beta_{11}\mu_k{}^4-2\beta_{16}\mu_k{}^3\\&\quad+(2\beta_{12}+\beta_{66})\mu_k{}^2-2\beta_{26}\mu_k+\beta_{22}.\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

3.4　応力・変位の公式

式(13)，(14)より，各応力成分及び変位成分は次のように表される．

$$\left.\begin{array}{l}\sigma_x = 2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3}\mu_k^{\,2}\phi_k{}'(z_k),\ \sigma_y = 2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3}\phi_k{}'(z_k),\\ \tau_{xy} = -2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3}\mu_k\phi_k{}'(z_k),\ \tau_{zx} = 2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3}\mu_k\lambda_k\phi_k{}'(z_k),\\ \tau_{yz} = -2\,\mathrm{Re}\Sigma\lambda_k\phi_k{}'(z_k)\end{array}\right\} \tag{17}$$

$$\left.\begin{array}{l}u = 2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3}\mu_k p_k\phi_k(z_k),\ v = 2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3}q_k\phi_k(z_k),\\ w = 2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3}r_k\phi_k(z_k).\end{array}\right\} \tag{18}$$

$$\left.\begin{array}{l}p_k = \dfrac{1}{\mu_k}\{a_{11}\mu_k^{\,2} + a_{12} - a_{16}\mu_k + \lambda_k(a_{15}\mu_k - a_{14})\},\\ q_k = \dfrac{1}{\mu_k}\{a_{12}\mu_k^{\,2} + a_{22} - a_{26}\mu_k + \lambda_k(a_{25}\mu_k - a_{24})\},\\ r_k = \dfrac{1}{\mu_k}\{a_{14}\mu_k^{\,2} + a_{24} - a_{46}\mu_k + \lambda_k(a_{45}\mu_k - a_{44})\}.\end{array}\right\} \tag{19}$$

4.　解析接続を用いた解析手法

4.1　写像関数

解析モデルのだ円境界における境界条件を，数学的に表記することが困難であるため，等角写像を用いて円に写像する．**図－3** に実平面と写像平面の関係を示す．

(a)に示す z−平面を Affine 変換によって(b)の z_k−平面に変換し，z_k−平面は以下の関数で表される．

$$z_k = x_k + iy_k \quad (k = 1,2,3) \tag{20}$$

$$x_k = x + \dot{\mu}_k y,\ y_k = \mu'_k y \quad (k = 1,2,3) \tag{21}$$

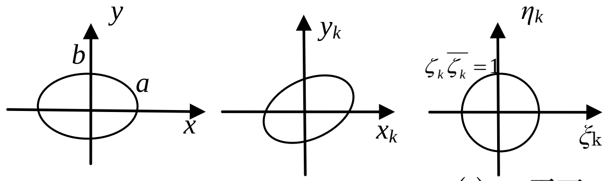
・記号は実部を，´ 記号は虚部を表す．そして，z_k-平面に対して，以下の写像関数を適用する．これにより，(c)に示す，$|\zeta_k| = 1$ の円に写像される．

$$z_k = x + \mu_k y = \omega_k(\zeta_k) = R_k\left(\zeta_k + \frac{m_k}{\zeta_k}\right)(k = 1,2,3) \tag{22}$$

$$\left.\begin{array}{l}\zeta_k = \xi_k + i\eta_k,\\ R_k = \dfrac{1}{2}\left(a - i\mu_k b\right),\ m_k = \dfrac{a + i\mu_k b}{a - i\mu_k b}.\end{array}\right\}\ (k = 1,2,3) \tag{23}$$

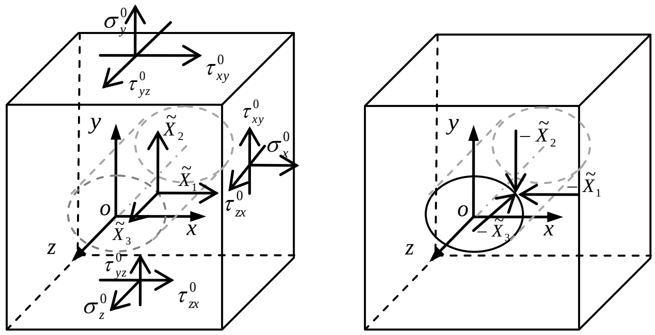
変換後の変数を用いると応力の公式は次式となる．

$$\left.\begin{array}{l}\sigma_{xx} = 2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3}\mu_k^2\varphi_k^I(\zeta_k),\ \sigma_{yy} = 2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3}\varphi_k^I(\zeta_k),\\ \sigma_{xy} = -2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3}\mu_k\varphi_k^I(\zeta_k),\ \sigma_{yz} = -2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3}\lambda_k\varphi_k^I(\zeta_k),\\ \sigma_{xz} = 2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3}\mu_k\lambda_k\varphi_k^I(\zeta_k).\end{array}\right\} \tag{24}$$



(a)z-平面　　(b)z_k-平面　　(c)ζ_k−平面

図－3　だ円から円への変換図



(a)仮想だ円境界上の合応力　　(b)だ円境界上に合応力を作用

図－4　解析モデルの分解

$$\varphi_k^I(\zeta_k) = \frac{\varphi'_k(\zeta_k)}{\omega'(\zeta_k)} \tag{25}$$

4.2　解析モデルの分解

図－1 に示す本研究の解析モデルを，**図－4**(a)に示すだ円孔のない異方性弾性体に無限遠一様応力が作用した場合の仮想境界上の合応力を求め，**図－4**(b)に示すだ円孔を有する異方性弾性体のだ円境界上に仮想境界上の合応力を逆向きに作用させた場合を重ね合わせて解析を行う [1]．

このことから，写像平面上の複素応力関数は，次式のように，基本関数 $\varphi_k^0(\zeta_k)$ と補正関数 $\varphi_k^r(\zeta_k)$ の重ね合わせとして表される．

$$\varphi_k(\zeta_k) = \varphi_k^0(\zeta_k) + \varphi_k^r(\zeta_k) \quad (k = 1,2,3) \tag{26}$$

基本関数および補正関数はそれぞれ，**図－4**(a)，(b)に示す，だ円孔のない異方性弾性体に一様応力が作用する場合の複素応力関数とだ円境界上に任意の荷重が作用する場合の複素応力関数を意味する．

4.3　解析接続を用いた解析手法

ここでは，鏡像の原理 [5]による解析接続を定義し，複素応力関数を定める方法について述べる．だ円境界上での境界条件を考えると，境界部は自由表面であることから合応力がゼロとなる．これより，P_x を合応力の x 軸方向成分，P_y を合応力の y 軸方向成分とすると，境界上で次式が成り立つ．

$$P_y + iP_x = 0 \tag{27}$$

$$P_x = 2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3}\mu_k\varphi_k(z_k),\ P_y = -2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3}\varphi_k(z_k). \tag{28}$$

式(28)を式(27)に代入し整理すると，次式を得る．

$$\begin{aligned}&(i-\mu_1)\varphi_1(\zeta_1)+(i-\mu_2)\varphi_2(\zeta_2)+(i-\mu_3)\varphi_3(\zeta_3)\\ &=-(i-\overline{\mu_1})\overline{\varphi_1}(\frac{1}{\zeta_1})-(i-\overline{\mu_2})\overline{\varphi_2}(\frac{1}{\zeta_2})-(i-\overline{\mu_3})\overline{\varphi_3}(\frac{1}{\zeta_3})\end{aligned} \tag{29}$$

また，式(29)について共役をとると次式となる．

$$\begin{aligned}&(i+\mu_1)\varphi_1(\zeta_1)+(i+\mu_2)\varphi_2(\zeta_2)+(i+\mu_3)\varphi_3(\zeta_3)\\ &=-(i+\overline{\mu_1})\overline{\varphi_1}(\frac{1}{\zeta_1})-(i+\overline{\mu_2})\overline{\varphi_2}(\frac{1}{\zeta_2})-(i+\overline{\mu_3})\overline{\varphi_3}(\frac{1}{\zeta_3})\end{aligned} \tag{30}$$

また，境界条件より，P_z を合応力の z 軸方向成分とすると，P_z=0 であり，整理すると，

$$P_z = \sum_{k=1}^{3}\{\lambda_k\varphi_k(\zeta_k)+\overline{\lambda_k}\,\overline{\varphi_k(\zeta_k)}\}=0 \tag{31}$$

$$\begin{aligned}&\lambda_1\varphi_1(\zeta_1)+\lambda_2\varphi_2(\zeta_2)+\lambda_3\varphi_3(\zeta_3)\\ &=-\overline{\lambda_1}\,\overline{\varphi_1}(\frac{1}{\zeta_1})-\overline{\lambda_2}\,\overline{\varphi_2}(\frac{1}{\zeta_2})-\overline{\lambda_3}\,\overline{\varphi_3}(\frac{1}{\zeta_3})\end{aligned} \tag{32}$$

を得る．式(29)，式(30)，式(32)より，鏡像の原理を用いることにより，境界を越えての解析接続が次式のように定義される．

$$\varphi_k{}^r(\zeta_k)\equiv R_k\{s_k\overline{\varphi_1{}^0}(\frac{1}{\zeta_1})+t_k\overline{\varphi_2{}^0}(\frac{1}{\zeta_2})+u_k\overline{\varphi_3{}^0}(\frac{1}{\zeta_3})\} \tag{33}$$

ここに，$\varphi_k{}^0$，$\varphi_k{}^r$ は前述の基本関数，補正関数であり，R_k，s_k，t_k，u_k は弾性コンプライアンスと複素特性根により表される複素定数である．

以上より，解析接続を用いることで，複素解析関数を基本関数より求めることができる．

5.　数値計算例

異方性材料として，だ円孔を有する直交異方性無限板に，一様応力 σ_y^0 を作用させた場合を考え，σ_y/σ_y^0 の分布を，母材を異方性弾性体として扱った場合と，等方性弾性体として扱った場合の，両者の解析結果を比較する．

なお，直交異方性無限板の弾性係数及びだ円孔の寸法は次の通りとする．

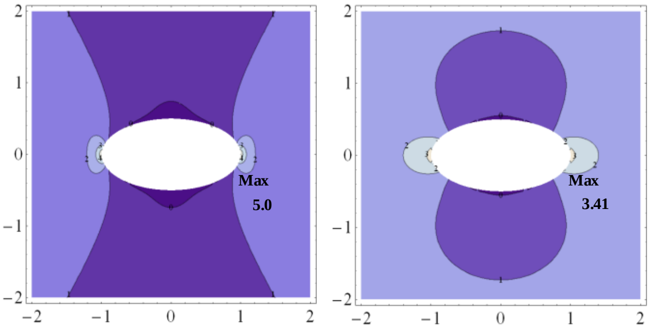
$E_x = 400GPa$，$E_y = E_z = 8.00GPa$，$G_{xy} = 7.75GPa$，
$G_{yz} = 2.86GPa$，$G_{zx} = 5.63GPa$，$\nu_{xy} = 0.300$，
$\nu_{yz} = 0.400$，$\nu_{zx} = 0.200$，

半長軸 $a = 1.0$，半短軸 $b = 0.5$

また，等方性弾性体とみなした場合の弾性係数を $E = 400GPa$，ポアソン比を $\nu = 0.300$ とする．

図−5 に σ_y/σ_y^0 の等応力線図示す．

両者ともだ円孔の長半軸上で最大値（応力集中係数）を生じている．等方性弾性体の場合は，応力集中係数 α はだ円孔の寸法 a，b から $\alpha = (1+2a/b)$ より 5.0 となるが，異方性弾性体の場合は $\alpha = 3.41$ となり，応力集中が緩和されていることがわかる．



(a)等方性弾性体　　(b)異方性弾性体

図−5　応力分布（σ_y/σ_y^0）の比較

6.　結言

従来の解析手法では，複素解析関数の補正関数を求める際に，一度一般的な形で関数を仮定し，境界条件を用いて連立方程式を立てることにより，未定係数を決定する必要があった．それに対して，解析接続を用いた解析手法の場合，鏡像の原理による解析接続を，境界条件式に適用することで解を導くことにより，直接境界条件から解を得ることができ，従来よりも解の導出過程が簡潔になっている．

さらに，従来の手法では，領域内の任意の点に特異項荷重が作用する問題については，複素解析関数を取り扱うことが困難であった．しかし，解析接続を用いると，簡便に解析解を求めることができるという利点がある．

参考文献

1) 種健：楕円形境界を有する各種の三次元異方性弾性体の力学解析に関する研究，博士学位論文，pp.1-44，2005.3
2) 木村清和：各種荷重下での空孔または剛体介在物を有する等方性弾性問題の解析解に関する研究，pp.5-10，博士論文，1994
3) J.F.Nye：Physical Properties of Crystals，pp.131-137，Oxford at the Clarendon Press，1957
4) S.G.Lekhnitskii:THEORY OF ELASTICITY OF AN ANISOTROPIC ELASTIC BODY，pp.1-40,pp.103-128,Holiden-Day,Inc,1963
5) 森口繁一：2 次元弾性論，pp.70-77，岩波講座，1957