

開水路における定在波の発生条件の実験的検証

中央大学理工学部学
中央大学大学院
中央大学理工学部

学生会員
学生会員
フェロー会員

○笠間 雄一郎
銭潮潮
山田 正

1. はじめに

2011年3月11日には東日本大震災が発生し、河川を遡上するものを含め、地震による津波を原因として多くの被害をもたらしている。津波の河川遡上の過程において定在波が発生し、河川水位の増加に寄与することが考えられる。しかし、波の河川遡上や定在波が発生するメカニズムは未だ解明されておらず、波が発生するメカニズムを明らかにすることは今後の日本の防災対策の基礎であり必要不可欠である。

河川における定在波の発生に関して水理物理量である単位幅流量 q 、全水頭 E 、比力 F の関係から、波の存在の有無や、流れにおける波の発生や波形を決定する理論が Benjamin と Lighthill ら¹⁾によって提唱されている。水平な河床において、単位幅流量 q とベルヌーイサム E 、運動量 F を上流端に人為的に与え、波の発生条件に関する理論を展開している。そこで本研究では開水路実験を行い、波の発生条件を考察し、上流端における比エネルギーと比力を限界比エネルギー E_c と限界比力 F_c で無次元化することにより、 r ：無次元化したベルヌーイサム（エネルギー）、 s ：無次元化した運動量（比力）が得られる。 r - s の関係により波の発生および、波形が決定される。また単位幅流量が一定の条件における波の発生条件（ r - s 関係）を用いて、常流においても波が発生の有無を開水路で実験し理論との比較を行い、理論の正当性を検証した。

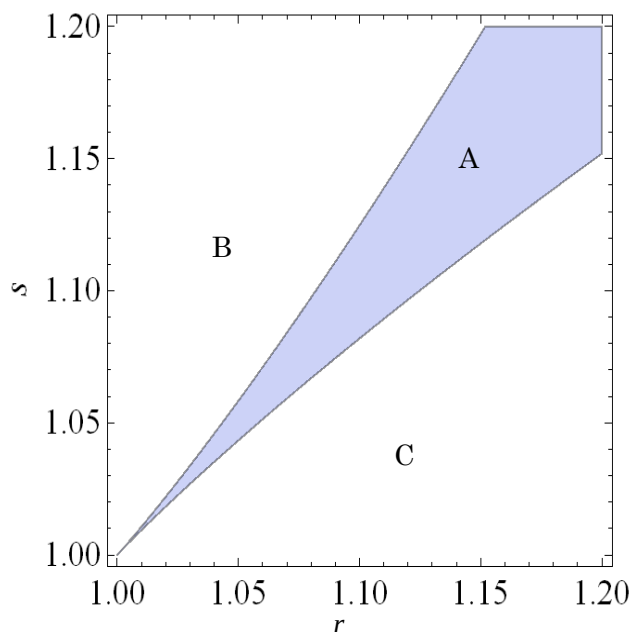


図-1 Benjamin と Lighthill の理論により

導かれた波の発生条件

（無次元比エネルギー r と無次元比力 s の関係）

2. 波の発生条件

河床が水平な開水路で流量 q を一定とし、全水頭 E 、比力 F が各断面で一定である波を伴う流れが発生していると仮定すると、 ρ を水の密度、 g を重力加速度、 y を任意の水深の高さとし、各水理量は(1)、(2)、(3)式で表すことができる、

$$q = \psi \quad (1) \quad E = \frac{1}{2}(\psi_x^2 + \psi_y^2) + gy + \frac{P}{\rho} \quad (2)$$

$$F = \int_0^y \left(\frac{P}{\rho} + \psi_y^2 \right) dy \quad (3)$$

(2)式はベルヌーイサム、(3)式は運動量を表し、(2)、(3)式のゲージ圧 P は自由表面上 ($y = \eta$) で $P = 0$ である、流量と水平方向、鉛直方向の各流速は流れ関数 ψ を用いて(4)、(5)、(6)式で表せると仮定する。

$$q = \psi = yf(x) - \frac{y^3}{3!} f''(x) + \frac{y^5}{5!} f'''(x) \quad (4) \quad \psi_x = yf'(x) - \frac{y^3}{6} f'''(x) \quad (5) \quad \psi_y = f(x) - \frac{y^2}{2} f''(x) \quad (6)$$

流れ関数 ψ の特徴は、流線上で一定の値をとることである。またゲージ圧 P と同様に自由表面でも ψ は一定である。(4)式をより、流れ関数 ψ は任意関数 $f(x)$ に関して Taylor 展開した形で表されており、各断面で各水理物理量が一定である波の波形は三角関数 $\sin$ で表され、正弦的な波形に近似していることが分かる。

(2)式を変形して(3)式に代入することにより(7)式を得る。

キーワード 定在波、無次元化、ベルヌーイサム、運動量

$$F = \int_0^\eta \left(E - gy - \frac{1}{2} \psi_x^2 + \frac{1}{2} \psi_y^2 \right) dy \quad (7)$$

ところで、(5)、(6)式を二乗して微小項を無視すると(8)、(9)式を得る。

$$\psi_x^2 = y^2 f'(x) - \frac{1}{3} y^4 f''(x) + \frac{1}{36} y^6 f'''(x)^2 \quad (8), \quad \psi_y^2 = f(x)^2 - y^2 f(x) f''(x) + \frac{1}{4} y^4 f''(x)^2 \quad (9)$$

以上の式を(7)に代入することにより運動量 F を任意関数 $f(x)$ で表した式を得る。

$$F = E\eta - \frac{1}{2} g\eta^2 - \frac{1}{6} f'(x)^2 \eta^3 + \frac{1}{2} f(x)^2 \eta - \frac{1}{6} f(x) \cdot f''(x) \eta^3 \quad (10)$$

また(4)式は、 $\psi = q$ は $y = \eta$ の位置でも一定であることを考慮し、任意関数 $f(x)$ で表すと(11)式となる。

$$f(x) = \frac{q}{\eta} + \frac{\eta^2}{6} f''(x) \quad (11)$$

(11)式と(10)式を微分し、また二乗した式を(10)式に代入して任意関数 $f(x)$ を消去することで水深 η に関する三次方程式(12)式を導くことが出来る。

$$\frac{1}{3} Q^2 \left(\frac{d\eta}{dx} \right)^2 + g\eta^3 - 2E\eta^2 + 2F\eta - Q^2 = 0 \quad (12)$$

$$U = -\frac{1}{3} Q^2 \left(\frac{d\eta}{dx} \right)^2 = g\eta^3 - 2E\eta^2 + 2F\eta - Q^2 \quad (13)$$

(13)式は、 $U \leq 0$ の時に実数解を持つ。図-2より、 $U < 0$ では水深 η が異なる3つの実数解を持ち、3つの水深の解の内2つが周期解をもつときのみ水面が振動し、定常的な波が発生することを意味している。

(7)式の水深方向 η 、流れ方向 x 、ベルヌーイサム E 、運動量 F を(14)、(15)、(16)、(17)、(18)式を用いて無次元化することにより(19)式を得る。

$$w = \frac{\eta}{h_c} \quad (14) \quad z = \frac{x}{h_c} \quad (15) \quad r = \frac{E}{E_c} \quad (16) \quad s = \frac{F}{F_c} \quad (17) \quad h_c = \sqrt[3]{\frac{q}{g}} \quad (18)$$

$$\frac{1}{3} \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 + w^3 - 3rw^2 + 3sw - 1 = 0 \quad (19)$$

(14)式は無次元化した鉛直方向の水深変化を表し、(15)式は流れ方向の水深の変化を表している。無次元化した水深に関する三次方程式(19)式が異なる三つの実数解をもつ条件はカルダノの公式を用いることにより(20)式で表せる、 $-(4p^3 + 27q^2) > 0$ (20) $p = 3(s - r^2)$ (21) $q = -2r^3 + 3rs - 1$ (22)

(20)式に、(21)、(22)式を代入することにより、判別式(23)式を得る。

$$3r^2 s^2 + 6rs - 1 - 4(r^3 + s^3) > 0 \quad (23)$$

つまり(10)式の無次元化した水深が異なる実数解を得る条件では、水面形に連続性があるということであり定在波が発生している状態を表すことができる。それに対して無次元化した水深が虚数解を得る条件では水面形が不連続になり、段波や跳水によるエネルギーの損失が起きていることを表す。(23)式を満たす領域(領域A)では図-1に示す様に r と s によって、波の発生及び存在を表す。また、(23)式の条件で満たされない領域では、波が発生していない流れ(領域B)及び、水深が0となり流れがない(領域C)ことを示す。また、(23)式から波が発生、存在する領域は、無次元化した比エネルギーと比力の値により定まることが明らかである。つまり上流端の流速 v_1 と水深 h_1 、単位幅流量 q の関係により波の有無が決定する。波が発生するかを判断する。上流側で与えた単位幅流量 q より求めた限界水深 h_c および上流端ごとに計測された流速 v_1 と水深 h_1 を(24)、(25)式に代入し、 r - s 関係を求めて波が発生するかを判断する

$$r = \frac{v_1^2 + 2gh_1}{3gh_c} \quad (24) \quad s = \frac{2v_1^2 h_1 + gh_1^2}{3gh_c^2} \quad (25)$$

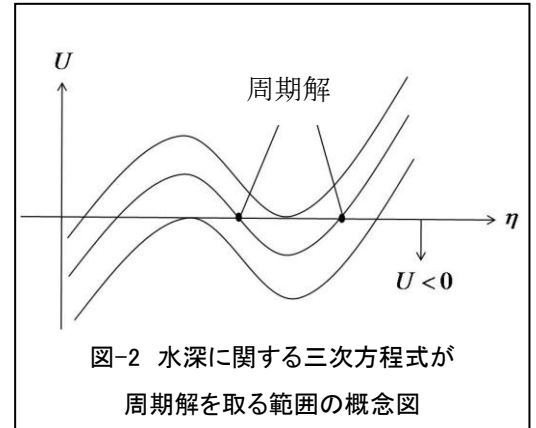


図-2 水深に関する三次方程式が周期解を取る範囲の概念図

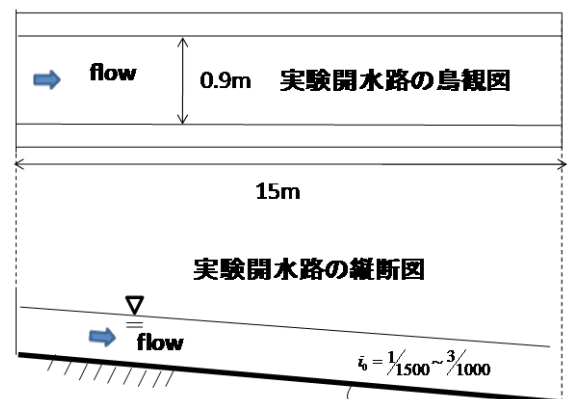


図-3 実験水路の概念図

3. 実験概要

実験水路の概念図を図-2に示す。実験で用いた開水路のスケールは縦15m、幅0.9m、であり、流量は $0.055\text{m}^3/\text{s}$ で固定して、勾配を $1/1500\sim 3/1000$ の範囲で変化させることにより異なる流速を得た。流速は電磁流速計、水深はポイントゲージを用い、横断方向に3点、縦断方向に上流端から4.5m~8.5mの間を50cm間隔で9点、計27点計測した。横断方向は3点計測した値を平均して、実測値とした。表-1は流量を $0.055\text{m}^3/\text{s}$ で固定し、各勾配での Fr を示しており、 Fr の値は9断面での各 Fr を平均して代表値としている。

4. 波の発生条件の実験による検証

4-1. 射流の場合

図-4は、流量 $0.055\text{m}^3/\text{s}$ で、勾配を変化させ、開水路の上流端から6.0m地点で、異なる流速、水深を得て計測した値を(15)、(16)式に代入し、 r と s の関係を示した図である。図-5の $r>3.0$ かつ $s>2.5$ の範囲に分布している丸型の3点は Fr が1以上の射流状態であり、この場合は開水路の下流部に定在波が発生した。射流状態で急勾配にし、流速を速めると、発生する波の波形は波長が変わらないが、波形勾配が切り立った波となった。

4-2. 常流の場合

図-5は図-4の $r<1.5$ かつ $s<1.5$ の範囲を拡大した $Fr<1$ の図であり、図-6は上流端から5m地点で流速、水深を測定した場合の r - s 関係を示した図である。また図-6は図-5と同様に $r<1.5$ かつ $s<1.5$ の範囲を拡大している。図-4、図-5、図-6から常流状態での r と s の値は概ね1.2以下をとることが分かり、測定する地点が違うだけで r と s の値が変わっている。case1~case3で r と s の値は、射流と違い波の発生、存在する青色の領域の左下側に分布し、流速と水深の微小な違いだけで容易に波の発生存在する青い領域の外に出ることが分かる。 $Fr<1$ では $r<1.1$ かつ $s<1.1$ 以内の範囲で r と s の値が分布する傾向が見られた。図-7内の点①は、実際には流れかつ波が確認されているにもかかわらず、流れが存在しない領域(C領域)に分布している。また、点②は波が確認されなかったが、波が発生する領域に分布している。点①、②は波が発生する領域(A領域)に近いものであり、開水路の側面に流れが引っ張られて流速が正確に測定出来ないことや、流速と水深の測定誤差によるものであると考えられる。

	勾配	Fr
case1	1/1500	0.69
case2	1/750	0.75
case3	1/500	0.85
case4	7/3000	1.03
case5	1/375	1.48
case6	3/1000	1.89
case7	1/3000	2.3

表-1 各実験 case の勾配、 Fr 一覧

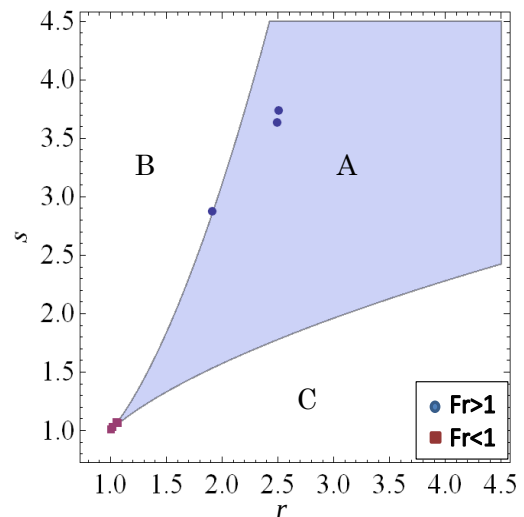


図-4 流量 $0.055\text{m}^3/\text{s}$ で各勾配時の上流端から6.0mの流速と水深に関する r - s の関係

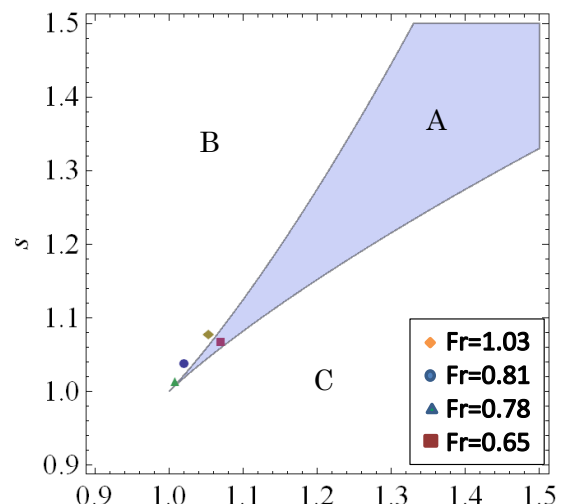


図-5 流量 $0.055\text{m}^3/\text{s}$ で各勾配時の上流端から6.0mの流速と水深に関する r - s の関係

4-3 常流, 射流状態での波の発生

図-4で, 波が発生, 存在する領域(A 領域)に載る点の中で, 常流状態で $Fr = 0.75$ で, 開水路全体に波長が長く, 波高が小さい波が発生し始めた. 常流状態では流速よりも発生する波の波速の方が速く, 波は定在することなしに上流方向に遡上するのが一般的であるが, 本実験においては常流で発生した波は開水路全体に定在していた. 射流の場合は下流部に顕著に波が確認できる. また, 上流端が常流の場合でも波が発生することを示した. 前節で述べた理論では河床勾配がない流れを取り扱っているが, 河床勾配があったにも関わらず波の発生, 存在条件は本実験において上述の理論に概ね実現象と一致していることが分かった.

5. 考察

図-4, 図-5, 図-6を見ると, Fr が 1 以下の常流状態で大きい値になるほど, r と s のとる値は小さくなる. それにより波の発生, 存在する領域内の左下側に分布する. それに対して Fr が 1 以上の射流状態で大きい値をとる場合, r と s のとる値は大きくなり, 波の発生, 存在する領域内の右上側に分布することが実験結果から分かった.

5-1. 定在波の考察

Fr が 1 以下の常流状態では case2 の $Fr=0.75$ と case3 の $Fr=0.85$ において, 波長が 1m, 波高が 0.01m の波が開水路全体に定在波が発生していた. 写真に示すのは case2 の場合で発生した定在波である. この時波の波形は波長が長く波形勾配が非常に小さい波の波形で, 波の頂点が切り立った波形であった. 実験水路で発生した波は全く動かない定在波であったが, この波はクノイダル波に類似した波形であった, それに対し, Fr が 1 以上の射流状態では, case4 においては下流部の水位が盛り上がり, 波が観測されなかった. case5 において下流部に定在波が発生し始めた.

6. まとめ

実験による検証で得られた知見を以下に示す.

- 1) 理論では河床勾配は無い事が条件だが, 河床勾配がある場合でも, 理論と実現象が一致することを示した.
- 2) 常流状態では実測の誤差により波が発生領域の外に容易に出てしまい発生条件, 領域の範囲が狭いことを示した.
- 3) 一般的にフルード数が 1 以下の常流で波が発生する場合, 流れの流速より波速の方が速く, 波が遡上するが, 本実験では case2, case3 で定在する波が存在することを示した.
- 4) 常流で発生した定在波の波形は正弦波ではなく, 波高の頂点が切り立った波であるクノイダル波に類似した波が確認できた.

7. 参考文献

- 1) T.B. Benjamin and M.J.Lighthill: On cnoidal waves and bores, 1950
- 2) 香月亜記範: 河床凸部および狭窄部を有する開水路流れの水面形に関する研究, 2010 年度中央大学研究年報
- 3) Quimpo Maririttess Sescar: Fundamental study on open channel flow with hump and narrow path, 2009 年度中央大学博士論文

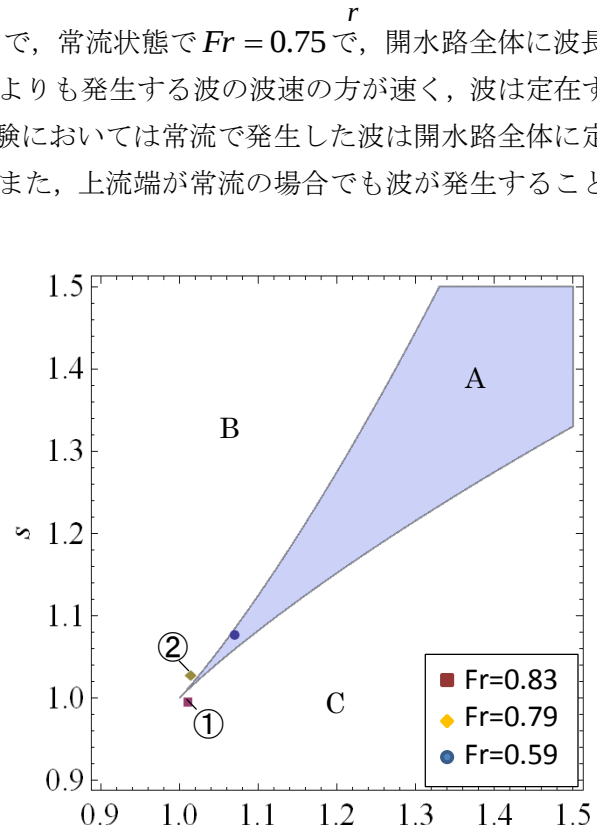


図-6 流量 $0.055\text{m}^3/\text{s}$ で各勾配時の上流端から 5.0m の流速と水深に関する r - s の関係

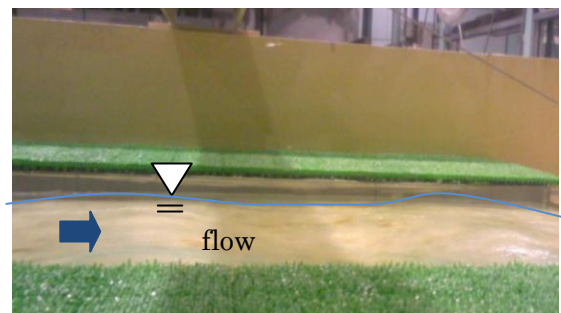


写真 常流の時に下流部で波が発生している様子