

不等流における流速の鉛直分布について—層流を対象として

国土館大学 正会員 ○山坂 昌成, 北川善廣
 国土館大学理工学部 王 治

1. はじめに

開水路流れにおける流速の鉛直分布は、平均流速と底面せん断応力の関係や湾曲流の二次流強度を規定する要因となるため、その定式化が必要であるが、一般的には、不等流であっても等流の流速分布が適用されている。たとえば、湾曲流の底面二次流強さは、このような流速分布を用いた結果、 $v_b/u_b = -N_*h/r$ のように簡単な形で表現される¹⁾が、不等流で流速分布が変化すると、 N_* の値が一定ではないことが想定される。すなわち、加速域（低下背水）と減速域（せき上げ背水）で二次流強度が異なる可能性がある。実河川を対象として、このことを議論するためには、乱流における流速分布の変化を議論する必要があるが、解析解が容易に得られると考えられる層流について、流速分布形に及ぼす加速・減速の影響と、そのメカニズムについて明らかにすることを目的として、理論解析を行った。

2. 基礎方程式

鉛直二次元の定常層流を想定し、流下方向(x 方向)流速を u 、水路上向き垂直方向(z 方向)流速を w 、水深を h 、圧力を p 、重力加速度を g 、水路の縦断勾配角を θ とすると、N-S方程式と連続式、及び境界条件は、

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} = g \sin \theta - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \dots (1)$$

$$u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -g \cos \theta - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \dots (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \dots (3)$$

$$z=0 \text{ で, } u = w = 0 \dots (4)$$

$$z=h \text{ で, } \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad w = u_s \frac{dh}{dx}, \quad p = 0 \dots (5)$$

となる。 u_s は、水面流速である。式(4),(5)を満足する最も単純な w の分布を採用し、

$$w = u_s \frac{dh}{dx} \frac{z}{h} \dots (6)$$

と仮定する²⁾。等流における流速を $(U, 0)$ 、不等流の流速と圧力を、

$$u = U + u', \quad w = 0 + w', \quad p = p_n + p' \dots (7.a,b,c)$$

とすると、式(1)から等流の流速 U 、式(2)の主要項から不等流の圧力分布が、以下のように得られる。

$$U = \frac{u_*^2 h}{\nu} F(\zeta), \quad F(\zeta) = \left(\zeta - \frac{\zeta^2}{2} \right) \dots (8.a,b)$$

$$p = p_n + p' = \rho g (h - z) \cos \theta \dots (9)$$

ここに、 $u_*^2 = gh \sin \theta$ 、 $\zeta = z/h$ である。

3. 不等流の流速分布解

式(6)を式(3)に代入すると、 u の流下方向変化は、

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{u_s}{h} \frac{dh}{dx} \dots (10)$$

となる。式(7)、(10)を式(1)に代入し、主要項のみを残すと、

$$U \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial U}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u'}{\partial z^2} \dots (11)$$

が得られる。左辺第1項は、流下方向への加速・減速項を、第2項は運動量の鉛直方向への輸送項、右辺第1項は、不等流の流下方向圧力勾配、第2項はせん断力項である。式(6)、(7)、(9)、(10)を式(11)に代入し、 dh/dx の2次以上の項を無視して線形化すると、

$$-U \frac{U_s}{h} \frac{dh}{dx} + U_s \frac{dh}{dx} \frac{z}{h} \frac{\partial U}{\partial z} = -g \cos \theta \frac{dh}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u'}{\partial z^2} \dots (12)$$

となる。以下のような無次元関数 $f(\zeta)$ 、および無次元パラメータ R_* を導入する。

$$u' = \frac{u_*^2 h}{\nu} f(\zeta) \dots (13) \quad R_* = \frac{u_* h}{\nu} \dots (14)$$

キーワード 不等流, 流速分布, 層流, 加速・減速

連絡先 〒154-8515 東京都世田谷区世田谷 4-28-1 国土館大学理工学部都市ランドスケープ学系

これにより、式(12)は、式(8)を代入して、以下のよう
に簡略化される。

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} &= \left[R_*^2 \left\{ -F(1)F + F(1)\zeta \frac{dF}{d\zeta} \right\} + \frac{1}{\tan \theta} \right] \frac{dh}{dx} \\ &= \left[R_*^2 \left\{ -\frac{1}{2}(\zeta - \frac{\zeta^2}{2}) + \frac{1}{2}\zeta(1-\zeta) \right\} + \frac{1}{\tan \theta} \right] \frac{dh}{dx} \\ &= \left[-\frac{1}{4}R_*^2\zeta^2 + \frac{1}{\tan \theta} \right] \frac{dh}{dx} \dots (15) \end{aligned}$$

となる。上式を式(4)、(5)の境界条件の下に解くと、

$$f = \left\{ \frac{1}{48}R_*^2(4\zeta - \zeta^4) - \frac{1}{\tan \theta} \left(\zeta - \frac{\zeta^2}{2} \right) \right\} \frac{dh}{dx} \dots (16)$$

が得られる。

4. 計算結果と考察

図-1に、等流の流速分布と加速不等流 ($dh/dx < 0$)
の流速分布の計算例を示す。等流の平均流速を U_m と
すると、

$$R_*^2 = 3 \frac{U_m h}{\nu} = 3R_{eh} \dots (17)$$

の関係があり、この計算例では、 $R_* = 91.7$ 、

$R_{eh} = 2,800$ であり、層流の範囲 ($R_{eh} \leq 500$) を越
えているが、特徴的な分布が得られたので、ここで
示した。全水深の下方7割程度の範囲で加速し、水
面付近が減速している。

レイノルズ数 R_{eh} が非常に小さい場合、式(12)の左
辺(加速度項)は、無視でき、圧力勾配と粘性力が
釣り合うことになるので、 $dh/dx < 0$ の加速流の場
合 f の関数形は、重力と粘性力が釣り合った、式(8)
で表される等流の流速分布についての F の関数形に
一致し、

$$f = -F \frac{hd/dh}{\tan \theta} \dots (18)$$

となる。これは、水路床勾配が、不等流の水面勾配
($\tan \theta - dh/dx$) に等しい等流の流速分布に一致し、
底面せん断応力も同様になる。しかし、式(16)では、
底面せん断応力の増加は、

$$\left[\frac{df/dz}{dz} \right]_0 = \left(\frac{1}{12}R_*^2 - \frac{1}{\tan \theta} \right) \frac{dh}{dx} \dots (19)$$

で表されるように、重力と圧力は底面せん断力と釣
り合わず、この多くが流れの加速に費やされている
ことが分かる。

この加速度項の内訳は、図-2に示すように、式(15)
の { } 内の第1項が ◆ で負、第2項が ■ で正である
が、その和は ▲ で示すように全域で負になっている。

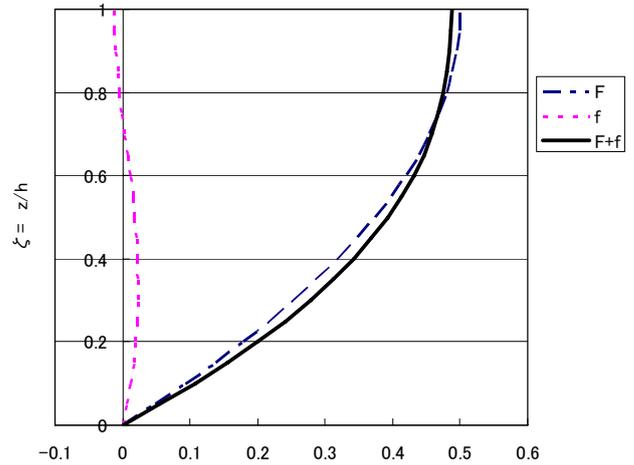


図-1 等流(F)と不等流(F+f)の流速分布
($h = 0.95\text{cm}$, $i_0 = 1/1000$, $dh/dx = -1/2000$)

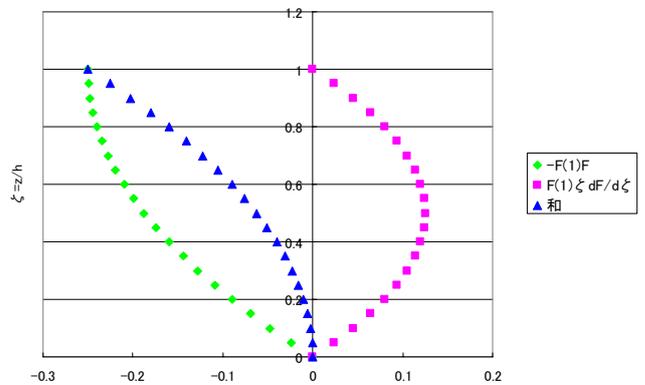


図-2 加速度項の内訳

$dh/dx < 0$ の加速流れでは、これと正負が逆転し、
式(1)の左辺第1項が正で、第2項が負であるが、足
し合わせると全域で正となっていること意味する。

通常、漸変流では水面勾配を i_s として、底面せん
断応力を

$$\tau_0 = \rho g h i_s = \rho g h (\tan \theta - dh/dx) \dots (20)$$

で見積もることが行われるが、今回計算した層流の
条件では、加速項が無視できずに、このような方法
は大きな誤差を伴うことが明らかになった。今後は、
流速分布形が異なる乱流について同様の解析を行い、
今回の指摘が、乱流についても該当するかどうかを
検討する必要があると思われる。

参考文献

- 1)Engelund, F : Flow and Bed Topography in Channel Bends, ASCE, Vol.100, HY11, pp.1631-1648, 1974.
- 2) 細田尚, 村本嘉雄, 宮本雅章: 水深積分モデルによる波状路床上の流れの底面せん断応力解析, 土木学会論文集, No. 588/II-38, pp.81-89,1997.