

CIVA-安定化有限要素法による浅水長波流れ解析

中央大学 学生員 ○ 高橋 佑典
中央大学 正会員 檜山 和男
日本工営(株) 正会員 桜庭 雅明

1. はじめに

津波や高潮などの数値解析には、浅水長波方程式が広く用いられて、様々な手法が提案されている。中でも、有限要素法は複雑な地形形状への適合性に優れ、かつメッシュの粗密づけも柔軟にできるため、複雑地形を有する広域の解析手法として有効であると言える。しかし、構造物の形状を考慮した津波遡上解析を行う場合、陸上部においてはかなり微細なメッシュが必要となる。

そこで、本論文では比較的粗いメッシュを用いる沖合領域と、微細メッシュを用いる沿岸および陸上領域に分け、その境界で解を接続するネスティング手法の構築を行い、その有効性を検討した。なお、離散化手法としては、CIVA-安定化有限要素法¹⁾を用いた。数値解析例として段波問題を取り上げ本手法の有効性の検討を行った。

2. 数値解析手法

(1) 支配方程式

支配方程式には、以下に示す浅水長波方程式を用いる。

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}h) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial (\mathbf{u}h)}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla (\mathbf{u}h) + (\mathbf{u}h) \cdot \nabla \mathbf{u} + c^2 \nabla (h+z) = 0 \quad (2)$$

ここで、 h は全水深、 $\mathbf{u}$ は断面平均流速、 c は波速、 z は地盤高さである。

Time Splitting 法により式(1)、(2)を移流段階と非移流段階の2段階に分離すると、以下の式が得られる。

移流段階

$$\frac{\partial (\mathbf{u}h)}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla (\mathbf{u}h) = 0 \quad (3)$$

非移流段階

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}h) = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial (\mathbf{u}h)}{\partial t} + (\mathbf{u}h) \nabla \cdot \mathbf{u} + c^2 \nabla (h+z) = 0 \quad (5)$$

式(3)にCIVA法²⁾を適用し、式(4)、(5)にはSUPG法に基づく安定化有限要素法³⁾を適用することで、解を求める。非移流段階における時間方向の離散化手法には、2次精度を有するCrank-Nicolson法を用いた。また、双方向のネスティング手法を用いることで、有限要素分割幅の異なる二つの領域を互いに接続し、計算を行った。

(2) CIVA 法

CIVA法は、移流方程式の高精度解法であるCIP法を三角形要素に拡張した手法である。計算方法は移流方程式

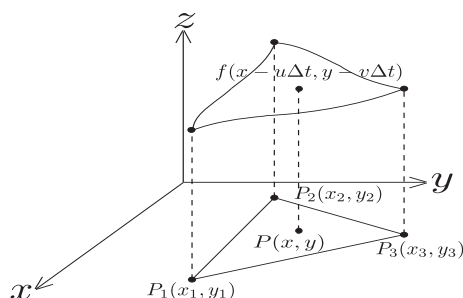


図-1 上流側の評価点

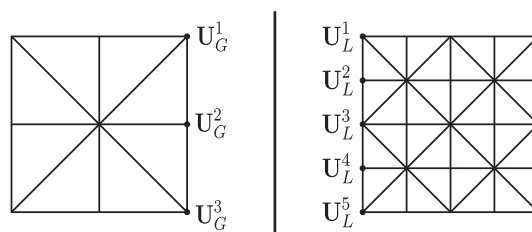


図-2 ネスティング概念図

の厳密解である式(6)を、上流側に張った3次の補間曲面(図-1)により求める。

$$f^{n+1}(\mathbf{x}, t) = f^n(\mathbf{x} - \mathbf{u}\Delta t, t - \Delta t) \quad (6)$$

なお、三角形要素における上流側要素に対する高次補間多項式は式(7)で定義される。

$$f(L_1, L_2, L_3) = \sum_{i=1}^3 \alpha_i L_i + d \sum_{\substack{j,k=1 \\ j \neq k}}^3 \beta_{jk} \left(L_j^2 L_k + \frac{1}{2} L_1 L_2 L_3 \right) \quad (7)$$

ここで、座標値 L_i は面積座標であり、部分三角形と全体の三角形の面積 S の比(S_i/S)で与えられる。 d は1次補間の場合に0、3次補間の場合には1となる。また、 α_i 、 β_{jk} は係数であり、上流側の三角形要素の物理量 f とその空間微係数を用いることにより、以下のように定義される。

$$\alpha_i = f_i \quad (8)$$

$$\beta_{jk} = f_j - f_k + (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_j) \cdot \nabla f_j \quad (9)$$

なお、微係数は最小二乗法により求める。

(3) ネスティング手法

本ネスティング手法は、グローバル領域(有限要素分割の粗い領域)と、ローカル領域(有限要素分割の細かい領域)を用意し互いの領域を接続する境界上で、接続を行うもの

KeyWords: 安定化有限要素法, CIVA 法, 浅水長波方程式

連絡先: 〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27 TEL 03-3817-1815

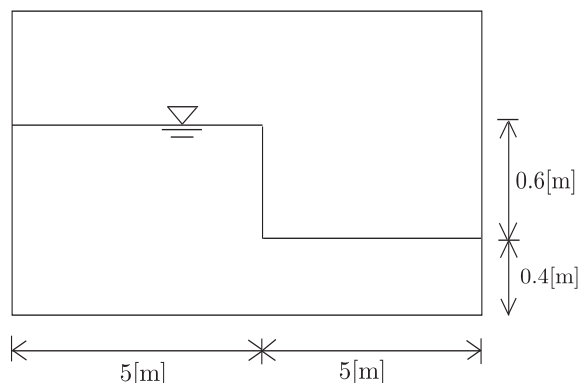


図-3 初期水面形状

である。このとき、接続境界上で適合（連続）条件を満たす必要があり、条件を満たす節点の重みは0とする。例として、図-2の場合を以下に示す。

$$U_G^1 = U_L^1 \quad (10)$$

$$U_G^2 = U_L^3 \quad (11)$$

$$U_G^3 = U_L^5 \quad (12)$$

$$U_L^2 = \alpha U_L^1 + \beta U_L^3 \quad (13)$$

$$U_L^4 = \alpha U_L^1 + \beta U_L^5 \quad (14)$$

ここに、 U は物理量（全水深、断面平均流速）、上添え字は各領域の節点番号、下添え字 G, L はそれぞれグローバル領域、ローカル領域を表し、 α, β は節点間の距離により決定される係数である。

3. 数値解析例

(1) 段波問題

本手法の有効性を検討するために、段波問題を取り上げる。幅が1[m]、長さ10[m]の矩形水路で、水位差が0.6[m]の段波を図-3のように、初期条件として与える。この水路を図-4、図-5のようにグローバル領域、ローカル領域に分割し、 $x=6[m]$ で互いの領域を接続した。なお、グローバル領域の x 方向要素分割幅は0.1[m]、 y 方向要素分割幅は0.5[m]、ローカル領域の x 方向要素分割幅は0.05[m]、 y 方向要素分割幅は0.25[m]で、微小時間増分を0.001[s]にとり、境界条件をSlip条件として解析を行った。

また、ネスティング処理を施さない場合の解析結果との比較を行った。その際、 x 方向要素分割幅0.1[m]、 y 方向要素分割幅0.5[m]のメッシュを用いた。

(2) 解析結果

図-6、図-7に、それぞれ1秒後における水路の中心面での水面形状、流速分布を示し、図-8、図-9に同時刻におけるネスティングを行わない場合の水面形状、流速分布を示した。図-6、図-7より、解析結果が厳密解に概ね一致していることが確認された。また、図-8、図-9より、部分的に細かなメッシュを用いることにより、ローカル領域における解析解がネスティングを行わない場合よりも厳密解に近づくことがわかる。

4. おわりに

本論文ではCIVA-安定化有限要素法を用いたネスティング手法を構築し、段波問題を数値解析手法として取り上げ、

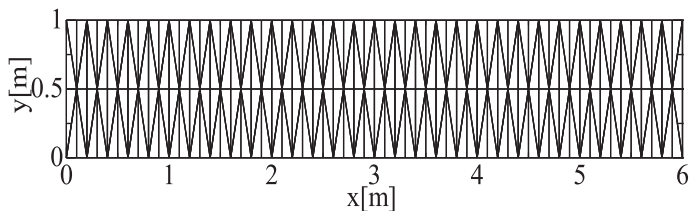


図-4 グローバル領域のメッシュ

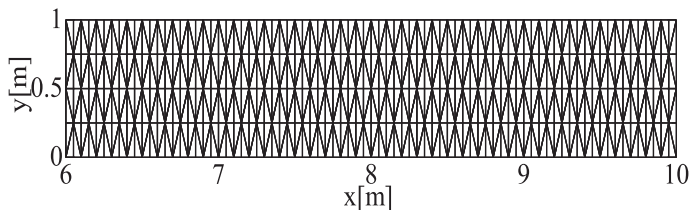


図-5 ローカル領域のメッシュ

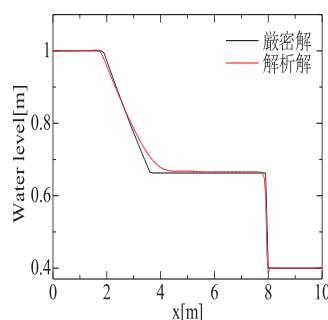


図-6 1秒後の水面形状

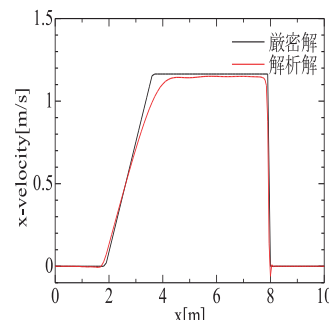


図-7 1秒後の流速分布

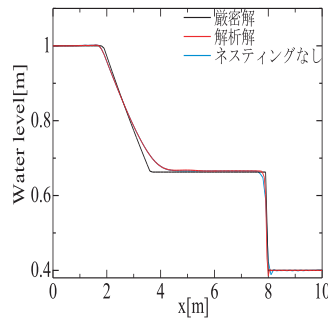


図-8 1秒後の水面形状

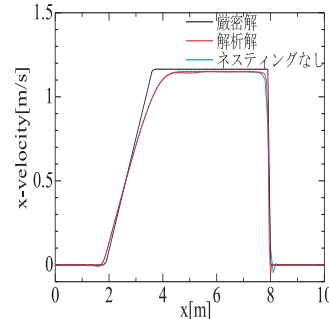


図-9 1秒後の流速分布

その有効性について検討した。その結果、本手法による解析結果は、厳密解と概ね一致を示し、妥当性と有効性を確認できた。

今後の課題として、より複雑な問題への適用が挙げられる。

参考文献

- 1) 吉松弘行、檜山和男：CIVA-安定化有限要素法による地すべりを起因とする造波解析、日本地すべり学会誌、Vol. 43. No.3, pp.131-141.
- 2) 田中伸厚：数値流体力学のための高精度メッシュフリー手法の開発、日本機械学会論文集 (B 編)、64-620, pp103-110, 1998.
- 3) T.E.Tezduyar : Stabilized finite element formulations for incompressible flow computations, *Advances in applied Mech.*, 28, pp1-44, 1991.