

SPH 粒子法による一次元浅水方程式の解法

防衛大学校 学生会員 ○浦川 翔大
防衛大学校 正会員 多田 毅

1. 緒言

Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH) 法は宇宙分野において開発され、圧縮性流体解析に利用されてきた。近年では非圧縮性流体解析に対する適用手法が多く開発されており、流体の界面捕獲や大変形問題、固液連成解析に適することから多方面の分野で利用されている。非圧縮性流体の解法としての粒子法である SPH 法や MPS (moving particle semi-implicit) 法などでは Navier-Stokes 方程式を解くことが一般的である。しかしながら、N.S. 方程式では鉛直方向に対しても離散化して計算を実施するため、計算量が多くなる。それにより、大スケールの問題への拡張が困難となり、実用性に乏しいものになってしまう。そこで本研究では基礎方程式を浅水方程式とすることにより、粒子法の長所を生しつつ大規模問題に適用できる手法として展開させることを試みる。浅水方程式の解法としては差分法や有限要素法で不足はないが、粒子法に適した様々な問題への拡張を目指す。また、N.S. 方程式よりも数学的にシンプルな浅水方程式を対象とすることにより、SPH 法の特長の評価が容易となり、誤差の問題も評価しやすい。このことから SPH 法の手法としての信頼性を向上させることにも繋がることと期待できる。

2. 基礎方程式と離散化手法

(1) 基礎方程式

本研究においては、次式で表される一次元浅水方程式を基礎方程式とした。浅水方程式は N.S. 方程式の物理量を鉛直方向に平均化した方程式である。今回、摩擦項、分散項などは考慮していない。

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \nabla \cdot (hu) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{Du}{Dt} + g\nabla(h+z) = 0 \quad (2)$$

ここで、 h は全水深、 u は平均流速、 z は地盤高である。

(2) Smoothed Particle Hydrodynamics

SPH 法は Monaghan ら(1974)によって開発された粒子

法の代表的手法であり、粒子法は有限個の粒子により空間を離散化し、物理量を Kernel 関数と呼ばれる平滑化関数を用いて近似を行うラグランジュ的手法である。ある粒子の物理量はその粒子の周囲の粒子の影響範囲で物理量を足し合わせることで表現される。また、粒子数が変化しない限り、質量保存が保たれ、連続の式を必ずしも明示的に計算する必要はない。よって、運動方程式のみを計算することで問題を解くことも可能である。

任意の物理量は Kernel 関数 w による近似の総和によ

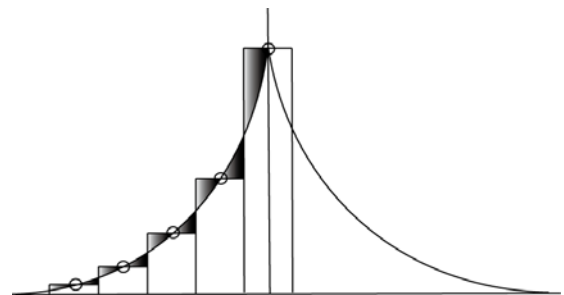


図-1 Kernel 関数の近似誤差

り表される。物理量の勾配を算出する際には Kernel 関数を微分したものの総和を用いる。

$$h_i = \sum_j V_j w(x_i - x_j, l_j) \quad (3)$$

$$\nabla h_i = \sum_j V_j \nabla w(x_i - x_j, l_j) \quad (4)$$

ここで、 h_i は x_i の位置での全水深、 V_j は x_j の位置の粒子の体積、 l_j はその粒子のスミージング長である。

また、一般に図-1に示すような離散化誤差が存在し、 w と ∇w とではその誤差が異なるため、何らかの補正を加えない限り w の近似誤差と ∇w の近似誤差のコンシステンシーが保たれないという問題があるが、それが計算結果に与える影響について詳細に検討した研究は少ない。本研究では、この問題についても検討を加える。

3. 計算条件及び結果

(1) 各粒子の影響半径の決定

粒子の持つ影響半径は現像の解像度に影響を及ぼす。影響半径を大きくすると影響半径内の計算粒子数が増加

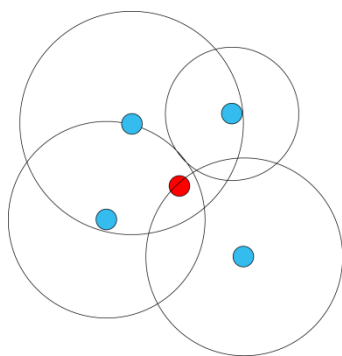


図-2 周辺粒子からの影響

し、計算は安定するが、解像度が低下し、現象の再現性は低いものになってしまう。本研究ではその値を可変とし、近傍粒子との距離を計算し、最も近い粒子と2番目に近い粒子との距離の平均を代表粒子間距離として、その3倍の距離を影響半径とした。

(2) Kernel 関数の選択

Kernel 関数の選択は SPH 法の精度や安定性に直結する重要な問題である。多くの研究において Gaussian カーネルまたは4次 Spline カーネルなどが使用されているが、本研究では(5)式で表される3次 Spiky カーネルを使用した。3次 Spiky カーネルを使用した場合、安定化のための人工粘性を加える必要が減少する。

$$w = \begin{cases} \frac{2}{l^4}(l-r)^3 & (r \leq l) \\ 0 & (r > l) \end{cases} \quad (5)$$

(3) 結果

水路長 10m、水深 0.2m で両端を壁面とした水路での波動の計算を幾つかのケースについて実施した。初期粒子間隔 0.025m、初期スムージング長 0.075m、時間刻み 0.01s、粒子数 400 である。その結果の例を図-4,5 に示す。基本的に差分法で得られる結果と同等の挙動を示した。

4. 結言

浅水流方程式の解法として粒子法の一つである SPH 法の適用を試みた。その結果、差分法と矛盾しない結果が得られた。今後は、精度の定量的な検証を進め、摩擦項や分散項などを導入し、津波の遡上計算などに適用する予定である。また、SPH 法は手法としての課題を未だに多く含んでおり、手法としての信頼性を高めることは継続した課題となる。

参考文献

- 1) G.R.Liu・M.B.Liu : Smoothed Particle Hydrodynamics, World Scientific, 2003.
- 2) G.M.Zhang・R.C.Batra : Modified smoothed particle hydrodynamics method and its application to transient problems, Computational Mechanics, 34, 137-146, 2004.

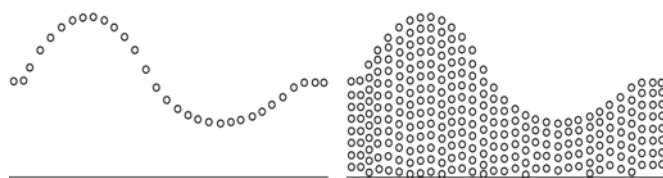


図-3 浅水流方程式(左)と Navier-Stokes 方程式(右)の粒子数の比較 (概念図)

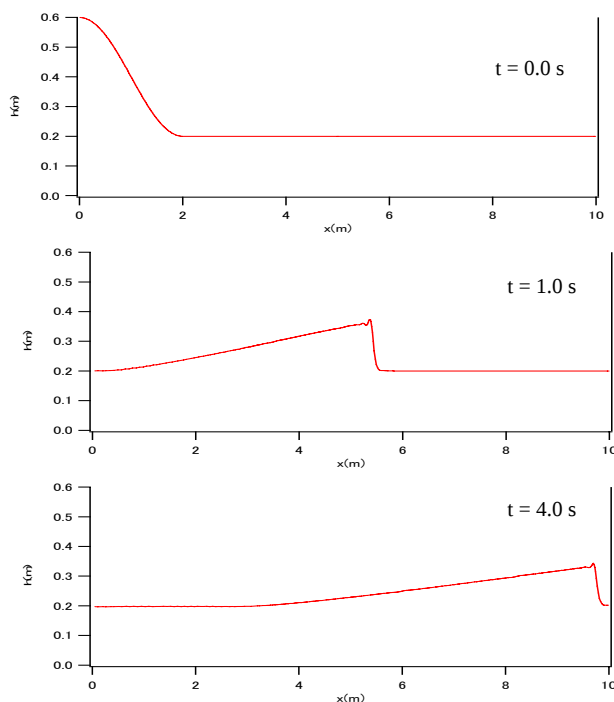


図-4 正弦波を与えた計算結果

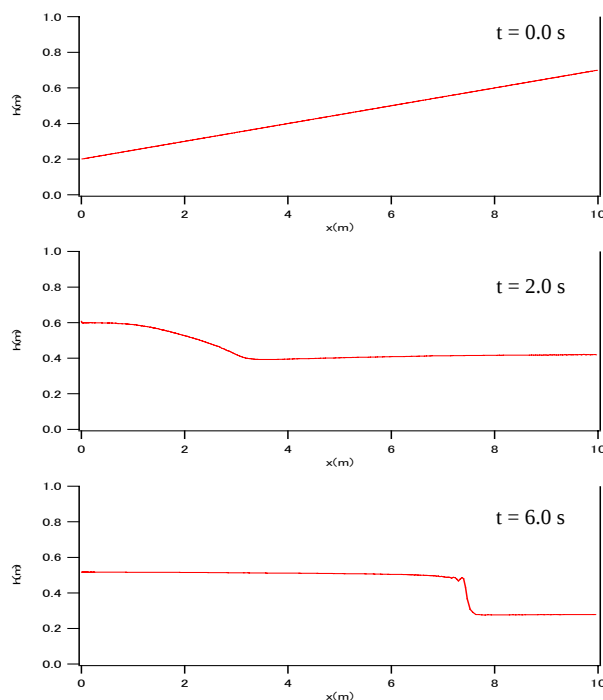


図-5 スロッッシング計算結果