

水文流出における不確定性

中央大学理工学部 学生員 ○小杉 和幹
中央大学理工学部 正会員 岡部 真人
中央大学理工学部 フェロー会員 山田 正

1. はじめに

降雨流出現象を考える際には、水文パラメータを推定するにあたり過去の水文データを用いることにより生じるパラメータの不確実性と、水文モデル自身の不確実性が必ず存在する。著者らは降雨流出現象を線形システムとして捉えた際に、応答関数に着目し不確実性について検証・考察を行った。

2. 線形応答系の理論

一般に入力 $r(t)$ と出力 $q(t)$ の間の線形システムは $H(\tau)$ をそのシステムの応答関数とすると式(1)と表わされる。

$$q(t) = \int_0^\infty H(\tau) r(t-\tau) d\tau \quad \dots\dots\dots (1)$$

これを降雨流出現象に適用すると、 $q(t)$:流出高(流量 Q / 流域面積 A [mm/h]) $H(\tau)$: 応答関数($\int_0^\infty H(\tau) d\tau = 1$, $H(\tau) \geq 0$ $H(0)=0$)とする、 $r(t)$:降雨強度 [mm/h]となる。次に、応答関数の期待値として(2)式を定義し、さらにその分散として(3)式を定義する。

$$\int_0^\infty \tau H(\tau) d\tau = \bar{\tau} \quad \dots (2)$$

$$\int_0^\infty (\tau - \bar{\tau})^2 H(\tau) d\tau = \sigma_H^2 \quad \dots (3)$$

ここで次の積分を考える。

$$I^2 = \left[\int_0^\infty \frac{1}{2} (\tau - \bar{\tau}) H(\tau) \frac{dH(\tau)}{d\tau} d\tau \right]^2 = \left[\int_0^\infty (\tau - \bar{\tau}) \sqrt{H(\tau)} \frac{d\sqrt{H(\tau)}}{d\tau} d\tau \right]^2 \dots (4)$$

ところで数学の基本定理の一つに $f(x)$, $g(x)$ の2つの任意の関数 $f(x)$, $g(x)$ の積からなる積分に関して、(3)式が成立するコーシーシュワルツの不等式がある。

$$\left[\int f(x)g(x)dx \right]^2 \leq \int f^2(x)dx \int g^2(x)dx \dots (5)$$

(4)式に(5)式の定理を適用すると(6)式の不等式が成立している。

$$I^2 = \left[\int_0^\infty (\tau - \bar{\tau}) \sqrt{H(\tau)} \frac{d\sqrt{H(\tau)}}{d\tau} d\tau \right]^2 \leq \int_0^\infty (\tau - \bar{\tau})^2 H(\tau) d\tau \cdot \int_0^\infty \left(\frac{d\sqrt{H(\tau)}}{d\tau} \right)^2 d\tau$$

$$= \sigma_H^2 \cdot \int_0^\infty \left(\frac{d\sqrt{H(\tau)}}{d\tau} \right)^2 d\tau \dots (6)$$

ところで I は(7)式に式変形できる。よって(6)式より応答関数の期待値の分散に関して(8)式の関係が成立していることがわかる。

$$I = \int_0^\infty (\tau - \bar{\tau}) \sqrt{H(\tau)} \frac{d\sqrt{H(\tau)}}{d\tau} d\tau = \int_0^\infty (\tau - \bar{\tau}) \frac{d\left(\frac{H(\tau)}{2}\right)}{d\tau} d\tau$$

$$= \left[(\tau - \bar{\tau}) \frac{1}{2} H(\tau) \right]_0^\infty - \frac{1}{2} \int_0^\infty H(\tau) d\tau = \frac{\bar{\tau}}{2} H(0) - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2} (\bar{\tau} H(0) - 1) \dots (7)$$

$$\frac{1}{4} (\bar{\tau} H(0) - 1)^2 \leq \sigma_H^2 \cdot \int_0^\infty \left(\frac{d\sqrt{H(\tau)}}{d\tau} \right)^2 d\tau \dots (8)$$

$$\sigma_H^2 \geq \frac{\frac{1}{4} (\bar{\tau} H(0) - 1)^2}{\int_0^\infty \left(\frac{d\sqrt{H(\tau)}}{d\tau} \right)^2 d\tau} \dots (9)$$

3. ギザギザ関数と Fisher の情報量

前項(9)式の分母は応答関数 $H(\tau)$ のギザギザ(の度合い)の程度を表していることからギザギザ関数 B とよぶこととする。

$$B = \int_0^\infty \left(\frac{d\sqrt{H(\tau)}}{d\tau} \right)^2 d\tau \dots (10)$$

ギザギザ関数 B は、(11), (12), (13)式に変形できる..

$$B = \int_0^\infty \left(\frac{d\sqrt{H(\tau)}}{d\tau} \right)^2 d\tau = \int_0^\infty \left(\frac{d\sqrt{H(\tau)}}{dH} \frac{dH}{d\tau} \right)^2 d\tau = \int_0^\infty \left(\frac{1}{2\sqrt{H(\tau)}} \frac{dH}{d\tau} \right)^2 d\tau$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^\infty \frac{1}{H(\tau)} \left(\frac{dH(\tau)}{d\tau} \right)^2 d\tau \dots (11)$$

$$B = \frac{1}{4} \int_0^\infty \frac{1}{H(\tau)} \left(\frac{dH(\tau)}{d\tau} \right)^2 d\tau = \frac{1}{4} \int_0^\infty \frac{1}{H} \frac{dH}{d\tau} \cdot \frac{1}{H} \frac{dH}{d\tau} H d\tau$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^\infty H(\tau) \left(\frac{d \log_e H(\tau)}{d\tau} \right)^2 d\tau \dots (12)$$

$$= \frac{1}{4} \left\{ \left[\frac{d \log_e H(\tau)}{d\tau} \right]_0^\infty - \int_0^\infty H(\tau) \frac{d^2 \log_e H}{d\tau^2} d\tau \right\}$$

$$= -\frac{1}{4} \int_0^\infty H(\tau) \frac{d^2 \log_e H}{d\tau^2} d\tau \dots (13)$$

とも表せる。

この B あるいは $4B$ は Fisher (フィッシャー) の情報量と呼ばれるものになっているが、まとめると(14)式となる。

$$B = \int_0^\infty \left(\frac{d\sqrt{H(\tau)}}{d\tau} \right)^2 d\tau = \frac{1}{4} \int_0^\infty \frac{1}{H(\tau)} \left(\frac{dH(\tau)}{d\tau} \right)^2 d\tau = \frac{1}{4} \int_0^\infty H(\tau) \left(\frac{d \log_e H(\tau)}{d\tau} \right)^2 d\tau$$

$$= -\frac{1}{4} \int_0^\infty H(\tau) \frac{d^2 \log_e H(\tau)}{d\tau^2} d\tau \dots (14)$$

キーワード 降雨流出, 線形モデル, 応答関数, Fisher の情報量, 不確定性

連絡先: 〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27 中央大学 理工学部 Tel03-3817-1805

4. 降雨流出現象における不確定性

前章のギザギザ関数 B は Fisher の情報量であり、これが大いほどシステムの情報量が大いことを意味する。(14) 式を (9) 式に代入すると (15), (16), (17) 式となる。

$$\sigma_H^2 \geq \frac{\frac{1}{4}(\bar{\tau}H(0)-1)^2}{\frac{1}{4} \int_0^\infty \frac{1}{H(\tau)} \left(\frac{dH}{d\tau} \right)^2 d\tau} = \frac{(\bar{\tau}H(0)-1)^2}{\int_0^\infty \frac{1}{H(\tau)} \left(\frac{dH}{d\tau} \right)^2 d\tau} \dots (15)$$

$$\sigma_H^2 \geq \frac{\frac{1}{4}(\bar{\tau}H(0)-1)^2}{\frac{1}{4} \int_0^\infty H(\tau) \left(\frac{d \log_e H(\tau)}{d\tau} \right)^2 d\tau} \dots (16)$$

$$\sigma_H^2 \geq -\frac{\frac{1}{4}(\bar{\tau}H(0)-1)^2}{\frac{1}{4} \int_0^\infty H(\tau) \frac{d^2 \log_e H}{d\tau^2} d\tau} \dots (17)$$

$$H(0)=0 \dots (18)$$

一般に応答関数は(18)式の特徴を持っていることが多いので、このときには(15), (16), (17)式において(18)式を考慮すると(19)式となる。(19)式の分母も Fisher の情報量とみなすことができ、これを改めて B_0 とおくと、(19)式は(20)式のようにシステムの応答関数の期待値の分散と Fisher の情報量との関係を表していることがわかる。

$$\sigma_H^2 \geq \frac{1}{\int_0^\infty \frac{1}{H(\tau)} \left(\frac{dH}{d\tau} \right)^2 d\tau} = \frac{1}{\int_0^\infty H(\tau) \left(\frac{d \log_e H(\tau)}{d\tau} \right)^2 d\tau} \\ = \frac{1}{-\int_0^\infty H(\tau) \frac{d^2 \log_e H}{d\tau^2} d\tau} \dots (19)$$

$$\sigma_H^2 \geq \frac{1}{B} \dots (20)$$

(20)式の分母である Fisher の情報量が大きくなると、応答関数の期待値の分散の下限がより小さくなる。分散はばらつきであるから、これは $H(\tau)$ の τ の平均値=期待値の位置がより確かになる可能性があることを意味する。

一方、情報量が少ないということはそれだけシステムに関する情報が少ないことになるが、情報が少ないほど平均値=期待値の位置が不確かになることを意味する。しかしながら、応答関数の関数型によっては情報量が多いことは必ずしも τ の平均値=期待値の位置の精度を自動的に向上させることを意味しないことに注意しなければならない。

このような関係となる理由は、(1)式からシステムの応答関数である $H(\tau)$ を推定する際に、情報量が少ない入出力データ、つまり滑らかなデータを用いると $H(\tau)$ の情報量も少なくなるためであると考えられる。同様に情報量の多い入出力データ、つまりギザギザした入力データを与えても、入出力データの質によっては $H(\tau)$ の情報量が多くなるとは限らないことが考えられる。また、

(18)式の分母は応答関数の情報量であるが、これを B_0 とおくと、 $\sigma^2 B_0 \geq 1$ となることから、 σ^2 が大きければ大きいほど B_0 は小さくなることがわかる。つまり応答関数の期待値の分散が大きければおおよそいほど応答関数の情報量が小さいことを示している

以上のことは、原子物理学における Heisenberg の不確定性原理になぞらえて、降雨流出現象における不確定性と呼ばれよう。原理と呼ばないのは、議論の出発点である(1)式がモデルであるからであるが、(1)式で表される全ての Input-Output 間の線形システムでは、共通の不

等式である。また(20)の意味するところは $\bar{\tau}$ のまわりの分散には下限があり、この値でしんぼうしろとでも言えよう。即ち降雨流出現象の予測の限界を示しているとも言える。なお(20)式において等号が成立しているのは応答関数 $H(\tau)$ がガウス分布形をしているときである。

5. まとめ

(1). 一般に入力 $r(t)$ と出力 $q(t)$ の間の線型システムにおいて、応答関数の期待値とその分散を定義し、コーシーシュワルツの不等式を適用すると、期待値の分散の下限値についての不等式が得られる。

(2) $H(0)=0$ という仮定を加えると応答関数の期待値の分散の下限値はフィッシャーの情報量 B と反比例することがわかった。

(3). 線形システムに精度の高いデータを入力することが自動的に期待値の位置の精度を増加させるとは限らないことが分かった。一方、線形システムに情報量の少ないデータを入力すると、期待値の位置の精度の下限を上げることになるため、期待値の位置が不確かになることが分かった。

(4). 応答関数の性質について、 $\sigma^2 B_0 \geq 1$ と式変形できることから、 σ^2 が大きければ大きいほど B_0 は小さくなることがわかった。これは応答関数の期待値の分散が大きければ大きいほど応答関数の情報量が小さくなることを示している。

参考文献

- 1) 山田正: 山地小流域の瞬間単位図と斜面長分布の関係, 土木学会論文報告集, vol. 306, pp. 11-21, 1981.
- 2) 山田正: 時定数スペクトルを用いた山地小流域の洪水流出解析, 土木学会論文報告集, vol. 314, pp. 87-98, 1981.
- 3) 呉修一, 山田正: 既往概念流出モデルの理論的導出, 水文・水源学会誌, Vol. 22, No5, pp. 386-400, 2009