熱流体連成解析における Boussinesq 近似と低マッハ数近似の予測精度の比較

中央大学 学生員 ○ 栗原 啓輔
中央大学大学院 学生員 池田 哲也
中央大学 正会員 樫山 和男

1. はじめに

都市の大気流れ解析においては，一般に Boussinesq 近似に基づく非圧縮性流体の基礎方程式が用いられているが，火災等の温度差の大きい高浮力流の解析においては低マッハ数近似と呼ばれる圧縮性流体の基礎方程式が一般に用いられている．

本報告では，Boussinesq 近似の適用性について検討するため，低マッハ数近似との比較を安定化有限要素法[1]による熱流体連成解析を用いて行った．

2. 数値解析手法

(1) Boussinesq 近似による基礎方程式と離散化手法

非圧縮性粘性流体流れにおいて，基礎方程式に Boussinesq 近似を用いた無次元化された Navier-Stokes 運動方程式，連続式およびエネルギー方程式を用いる．

運動方程式；

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{1}{Re}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) - \frac{Gr}{Re^2}T\delta_{i2} = 0 \quad (1)$$

連続式；

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2)$$

エネルギー方程式；

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u_i\frac{\partial T}{\partial x_i} + \frac{1}{PrRe}\frac{\partial^2 T}{\partial {x_i}^2} = 0 \quad (3)$$

上式において，u_i は x_i 方向の流速成分，p は圧力，T は温度，δ_{i2} はクロネッカーのデルタ，$Re(= UL/\nu)$ は Reynolds 数，$Gr(= g\beta(T_w - T_c)L^3/\nu^2)$ は Grashoh 数，$Pr(= \nu/\alpha)$ は Prantdl 数である．また，$Ra(= Pr \times Gr)$ はRayleigh 数を表す．ただし g は重力加速度，$\beta(= 1/T_0)$ は体膨張係数，T_w は高温壁温度，T_c 低温壁温度，U は代表速度，L は代表長さ，ν は動粘性係数，α は温度伝導率である．

本解析では分離型解法の手法を用いて計算を行う．分離型解法（流速修正法）は，圧力場と流速場を分離して解く手法である．式 **(1)**，**(2)** に時間方向の離散化を行うことにより式，**(4)**，**(5)** を得る．

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + u_j^n\frac{\partial u_i^n}{\partial x_j} + \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_i} - \frac{1}{Re}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u_i^n}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^n}{\partial x_i}\right) - \frac{Gr}{Re^2}T\delta_{i2} = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial u_i^{n+1}}{\partial x_i} = 0 \quad (5)$$

次に，流速の予測子として式 **(6)** を定義する．

$$\tilde{u}_i = u_i^n - \Delta t\left\{u_j^n\frac{\partial u_i^n}{\partial x_j} - \frac{1}{Re}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u_i^n}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^n}{\partial x_i}\right) + \frac{Gr}{Re^2}T\delta_{i2}\right\} \quad (6)$$

式 **(6)** と境界条件から中間流速 $\tilde{u}_i$ を求める．そして，式 **(4)** の両辺の発散をとり，式 **(5)** を代入して整理すると，式 **(7)** のポアソン方程式が導かれる．

$$\frac{\partial^2 p^{n+1}}{\partial x_i^2} = \frac{1}{\Delta t}\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_i} \quad (7)$$

求めた中間流速とポアソン方程式 **(7)**，境界条件から圧力 p^{n+1} を求める．また，式 **(4)** に Δt をかけたものから式 **(6)** を引くと，速度場 u_i^{n+1} に関する式 **(8)** が導かれる．

$$u_i^{n+1} = \tilde{u}_i - \Delta t\frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_i} \quad (8)$$

式 **(8)** に，p^{n+1} と $\tilde{u}_i$ を代入して速度場が計算される．その後，エネルギー方程式から T^{n+1} を求める．式 **(7)** と式 **(8)** に対しては Galerkin 法に基づく有限要素法，式 **(6)** に対しては SUPG 法に基づく安定化有限要素法を適用し，空間方向の離散化には P1/P1 要素による補間を行う．なお，エネルギー方程式の時間方向の離散化に関しては，Euler の前進差分法を用いた．

(2) 低マッハ数近似による基礎方程式と離散化手法

低マッハ数近似は圧縮性 Navier-Stokes 方程式をもとにして，流れのマッハ数が小さいことを仮定して得られる近似である．基礎方程式に低マッハ数近似を用いて無次元化された Navier-Stokes 運動方程式，連続式，エネルギー方程式，状態方程式を用いる．

運動方程式；

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i u_j}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{1}{Re}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) + \frac{Ga}{Re^2}(\rho - 1)\delta_{i2} = 0 \quad (9)$$

連続式；

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (10)$$

エネルギー方程式；

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u_i\frac{\partial T}{\partial x_i} - \frac{1}{\rho PrRe}\frac{\partial^2 T}{\partial {x_i}^2} = 0 \quad (11)$$

状態方程式；

$$\rho = \frac{1}{(\beta\Delta TT + 1)} \quad (12)$$

KeyWords： 安定化有限要素法，エネルギー方程式，Boussinesq 近似，低マッハ数近似
連絡先： 〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27 TEL 03-3817-1815 FAX 03-3817-1815

上式において，ρ は密度，$\Delta T(= T_w - T_c)$ は高温壁と低温壁の温度差，$Ga(= gL^3/\nu^2)$ は Galilei 数である．

低マッハ数近似の場合も分離型解法の手法を用いて計算を行う．式 (9)，(10) に時間方向の離散化を行うことにより式 (13)，(14) を得る．

$$\frac{\rho u_i^{n+1} - \rho u_i^n}{\Delta t} + \frac{\partial \rho u_i^n u_j^n}{\partial x_j} + \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_i} - \frac{1}{Re}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u_i^n}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^n}{\partial x_i}\right) + \frac{Ga}{Re_2}\left(\rho^n - 1\right)\delta_{i2} = 0 \quad (13)$$

$$\frac{\rho^{n+1} - \rho^n}{\Delta t} + \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (14)$$

解析の手順は，まずエネルギー方程式 (11) から T^{n+1} を求める．その後状態方程式 (12) から ρ^{n+1} を求める．次に，運動方程式から流速の予測子として式 (15) を定義する．

$$\rho\tilde{u}_i = \rho u_i^n - \Delta t\left\{\frac{\partial \rho u_i^n u_j^n}{\partial x_j} - \frac{1}{Re}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u_i^n}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^n}{\partial x_i}\right) + \frac{Ga}{Re^2}\left(\rho^n - 1\right)\delta_{i2}\right\} \quad (15)$$

式 (15) と境界条件から中間流速 $\rho\tilde{u}_i$ を求める．式 (13) の両辺の発散をとり，式 (14) を代入して整理すると，式 (16) のポアソン方程式が導かれる．

$$\frac{\partial^2 p^{n+1}}{\partial x_i^2} = \frac{1}{\Delta t}\left(\frac{\rho^{n+1} - \rho^n}{\Delta t}\right) + \frac{1}{\Delta t}\frac{\partial \rho\tilde{u}_i}{\partial x_i} \quad (16)$$

中間流速とポアソン方程式 (16)，境界条件から圧力 p^{n+1} を求める．また，式 (13) に Δt をかけたものから式 (15) を引くと，速度場 u_i^{n+1} に関する式 (17) が導かれる．

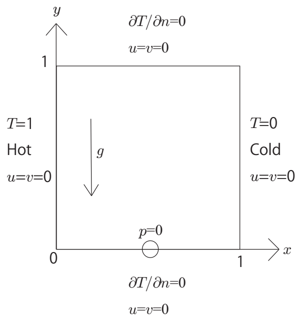
$$\rho u_i^{n+1} = \rho\tilde{u}_i - \Delta t\frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_i} \quad (17)$$

式 (17) に，p^{n+1} と $\rho\tilde{u}_i$ を代入して速度場が計算される．ただし，u_i^{n+1}=ρu_i^{n+1} /ρ^{n+1} とする．式 (16) と式 (17) に対しては Galerkin 法に基づく有限要素法，式 (15) に対しては SUPG 法に基づく安定化有限要素法を適用し，空間方向の離散化には P1/P1 要素による補間を行う．なお，エネルギー方程式の時間方向の離散化に関しては，Euler の前進差分法を用いた．

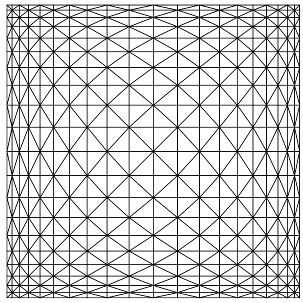
3.　Cavity 内自然対流問題

(1)　解析領域と条件

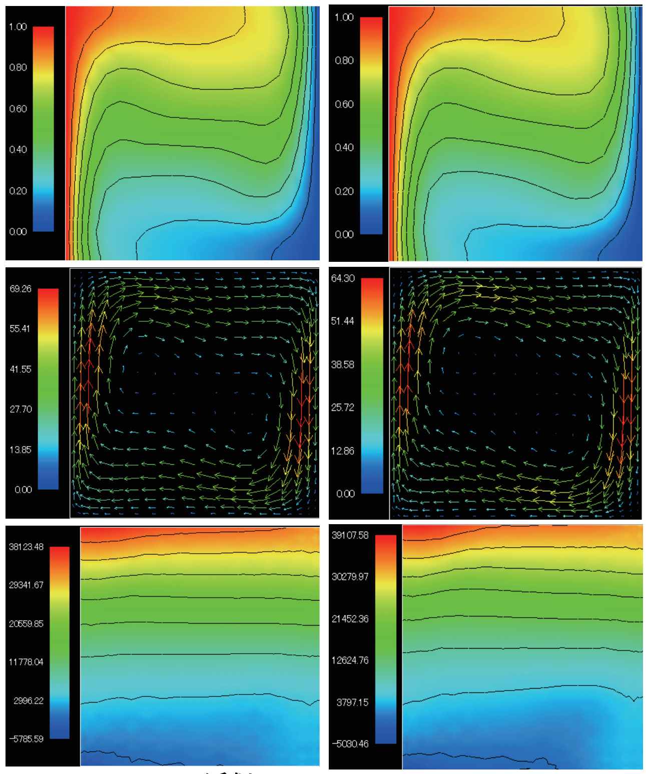
図－1 に解析領域，境界条件を，**図－2** に要素分割図を示す．また，Prandtl 数は 0.71，Raynolds 数は 1.41 とし，低マッハ数近似による解析においては基準温度を $T_0 = 288[K]$ とする．領域分割数は x 方向，y 方向それぞれ 20 分割× 20 分割，総節点数 441，総要素数 800 とする．初期条件は流速・圧力に関して全領域で 0，温度に関しては高温壁を除き 0 とした．最小メッシュ幅で 1.74×10^{-2}，微小時間増分量は 1.0×10^{-6} である．なお，Boussinesq 近似の場合は Grashof 数を変化させることで Rayleigh 数を決めているが，低マッハ数近似の場合，設定温度差 ΔT により Galilei 数を変化させることで Rayleigh 数を決めている．本報告では Rayleigh 数 $Ra = 10^5$，温度差 $\Delta T = 1$ とする．



図－1　解析領域，境界条件



図－2　要素分割図



Boussinesq 近似　　　　低マッハ数近似 $\Delta T = 1$

図－3　温度分布 (上)，流速分布 (中)，圧力分布 (下) の比較

(2)　解析結果

図－3 に Ra=10^5 における Boussinesq 近似と低マッハ数近似 ($\Delta T = 1$) における温度，流速，圧力の比較を示す．上から順に温度分布，流速分布，圧力分布を表している．Boussinesq 近似による解は，温度差 ΔT が小さい場合の低マッハ数近似による解と良い一致を示すことが確認できた．

4.　おわりに

本報告では安定化有限要素法による熱流体連成解析において Boussinesq 近似と低マッハ数近似による解の比較を行った．温度差が小さい場合，両近似式の解の差異は小さいことが確認できた．

今後の課題として，高温度差での解析があげられる．

参考文献

1) T.E.Tezduyar：Stabilized finite element formulations for incompressible flow computations，Advance in Applied Mechanics，28，pp.1-44，1992.
2) 白石靖幸，加藤信介，石田義洋：低マッハ数近似との比較による Boussinesq 近似式の予測精度の検討，日本建築学会環境系論文集，第 577 号，13-18，2004.3
3) 渕本信行，松崎和愛，高良和則，若水信也，栗島啓聡，大庭英樹：温度差が大きい自然対流の数値解析，日本機械学会講演論文集，No.018-1，2001.3