

# 安定化有限要素法による改良 $k - \varepsilon$ モデルを用いた地表面高温領域周辺気流解析

中央大学大学院 学生員 ○ 池田 哲也  
中央大学 正会員 櫻山 和男

## 1. はじめに

近年、経済社会活動や人口の都市域への過剰の集中により、都市部においてヒートアイランド現象が年々顕在化し社会問題となっている。これらの対策として進められている屋上緑化などの屋外温熱環境緩和手法の効果を定量的に評価することは極めて重要である。

本研究では、Launder-Kato 型の改良  $k - \varepsilon$  モデルを安定化有限要素法<sup>1)</sup>に適用した。非等温場における本手法の精度検証を目的とし、数値解析例として地表面高温領域周辺気流解析を取り上げ、既存の実験値<sup>2)</sup>及び解析値<sup>3)</sup>との比較を行った。

## 2. 数値解析手法

### (1) 基礎方程式

非等温場における非圧縮性粘性流体を考え、Boussinesq 近似を仮定する。レイノルズ平均操作及び、無次元化を施された運動方程式、連続式、乱流エネルギーの輸送方程式、エネルギー散逸率の輸送方程式、エネルギー方程式はそれぞれ式 (1), (2), (3), (4), (5) で表される。

運動方程式；

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{2}{3} \frac{\partial k}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \left( \frac{1}{Re} + \nu_T \right) \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \right\} + \frac{Gr}{Re^2} \bar{\theta} \delta_{i2} = 0 \quad (1)$$

連続式；

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2)$$

乱流エネルギーの輸送方程式；

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial k}{\partial x_j} - \frac{\nu_T}{\sigma_k} \frac{\partial^2 k}{\partial x_j^2} - P_k + \varepsilon - G_k = 0 \quad (3)$$

エネルギー散逸率の輸送方程式；

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} - \frac{\nu_T}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x_j^2} - (C_{\varepsilon 1} P_k - C_{\varepsilon 2} \varepsilon + C_{\varepsilon 3} G_k) \frac{\varepsilon}{k} = 0 \quad (4)$$

エネルギー方程式；

$$\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_j} - \left( \frac{1}{Pr Re} + \frac{\nu_T}{\sigma_\theta} \right) \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial x_j^2} = 0 \quad (5)$$

$$\nu_T = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon},$$

$$\begin{cases} P_k = \nu_T \bar{S}_{ij} \bar{\Omega}_{ij} & (\bar{\Omega}_{ij} / \bar{S}_{ij} \leq 1) \\ P_k = \nu_T \bar{S}_{ij} \bar{S}_{ij} & (\bar{\Omega}_{ij} / \bar{S}_{ij} > 1) \end{cases}$$

$$\bar{S}_{ij} = \sqrt{\frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right)^2}, \bar{\Omega}_{ij} = \sqrt{\frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right)^2}$$

$$G_k = \frac{Gr}{Re^2} \frac{\nu_T}{\sigma_\theta} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_i} \delta_{i2}$$

$\bar{u}_i, \bar{p}, \bar{\theta}$  はそれぞれレイノルズ平均操作及び、無次元化を施された流速、圧力、温度であり、 $k$  は乱流エネルギー、 $\varepsilon$  エネルギー散逸率、 $\nu$  は動粘性係数、 $\nu_T$  は渦動粘性係数である。 $Re (= UL/\nu)$  は Reynolds 数、 $Gr (= g\beta(\theta_w - \theta_c)L^3/\nu^2)$  は Grashof 数、 $Pr (= \nu/\alpha)$  は Prandtl 数である。ただし  $g$  は重力加速度、 $\beta$  は体膨張係数、 $\theta_w$  は高温壁温度、 $\theta_c$  低温壁温度、 $U$  は代表速度、 $L$  は代表長さ、 $(\theta_w - \theta_c)$  は代表温度差、 $\nu$  は動粘性係数、 $\alpha$  は温度伝導率である。また、定数群は以下の通りである。

$$C_\mu = 0.09, \sigma_k = 1.0, \sigma_\varepsilon = 1.3, \sigma_\theta = 0.5$$

$$C_{\varepsilon 1} = 1.44, C_{\varepsilon 2} = 1.92, C_{\varepsilon 3} = 1.44$$

### (2) 非等温場における浮力の生産項におけるモデル化

#### a) Viollet 型<sup>4)</sup>

一般的に用いられているモデルで、 $\varepsilon$  の輸送方程式の左辺第 6 項における浮力による  $k$  の生産  $G_k$  を流れ場が不安定 ( $G_k > 0$ ) の場合に平均流による  $k$  の生産  $P_k$  と同等に評価する。また、流れ場が安定 ( $G_k < 0$ ) の場合には無視するという操作を行う。

$$\begin{cases} C_{\varepsilon 3} = 1.44 & (G_k > 0 : \text{不安定の場合}) \\ C_{\varepsilon 3} = 0.0 & (G_k < 0 : \text{安定の場合}) \end{cases}$$

#### b) Rodi 型<sup>5)</sup>

同様に  $\varepsilon$  の輸送方程式の浮力による  $k$  の生産を評価する際に、流れ場を垂直せん断流と水平せん断流とに区別する。垂直せん断流では浮力による  $k$  の生産  $G_k$  を平均流による生産  $P_k$  と等しく評価し、水平せん断流では  $G_k$  を小さく評価する。式 (4) の左辺第 4 項、第 6 項を以下のように書き換える。

$$C_1 \frac{\varepsilon}{k} (P_k + G_k) (1 + 0.8 Rf) \quad (6)$$

$$\begin{cases} Rf = 0.0 & (\bar{u}^2 + \bar{v}^2 \leq \bar{w}^2) \\ Rf = -\frac{G_k}{P_k + G_k} & (\bar{u}^2 + \bar{v}^2 < \bar{w}^2) \end{cases} \quad (7)$$

### (3) 離散化手法

基礎方程式、式 (1), (2) に対して SUPG/PSPG 法に基づく安定化有限要素法を、式 (3) ~ (5) に対して SUPG 法に基づく安定化有限要素法を用いて空間方向の離散化を行

**KeyWords：** 安定化有限要素法、 $k - \varepsilon$  型 2 方程式モデル、エネルギー方程式

**連絡先：** 〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27 TEL 03-3817-1808 FAX 03-3817-1815

う．時間方向の離散化には，Crank-Nicolson 法により離散化を行い，連立 1 次方程式の解法には Element-by-Element Bi-CGSTAB2 法を用いた．

### 3. 数値解析例

非等温場における本手法の精度検証を行うため，地表面高温領域周辺気流解析を行い，既存の実験値<sup>2)</sup>および数値解析解<sup>3)</sup>との比較を行った．

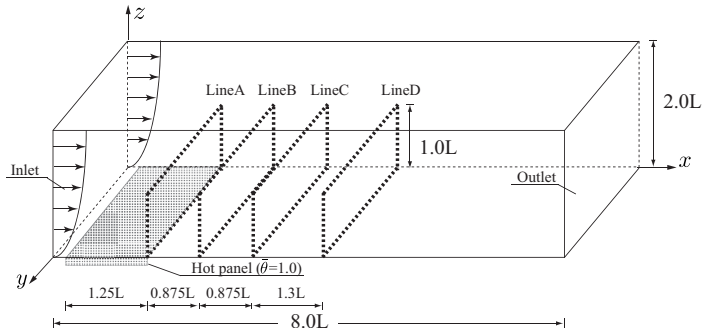


図 - 1 解析領域

表 - 1 境界条件

|      |                                                                                                                                                                                                                                                     |
|------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 流入境界 | $\bar{u}, k$ は図 - 2 に示す．<br>$\bar{v} = \bar{w} = \bar{\theta} = 0.0, \varepsilon = 300k^2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}$                                                                                                                      |
| 流出境界 | Traction-free 条件                                                                                                                                                                                                                                    |
| 上面   | slip 条件                                                                                                                                                                                                                                             |
| 底面   | $\frac{\bar{u}_p}{\tau_w} (C_\mu^{1/2} k_p)^{1/2} = \frac{1}{\kappa} \ln \left( \frac{E h_p (C_\mu^{1/2} k_p)^{1/2}}{\nu} \right)$<br>$\varepsilon_p = \frac{C_\mu^{3/4} \cdot k_p^{3/2}}{\kappa h_p}$<br>Hot-panel 上で Case1 では $\theta = 1.0$ を与える |

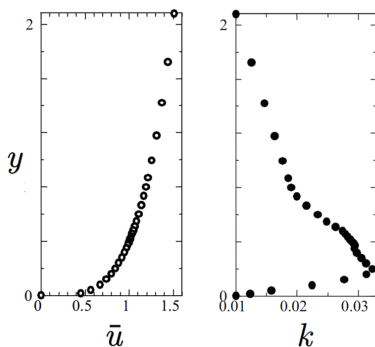


図 - 2

#### (1) 計算条件

図 - 1 に解析領域 表 - 1 に境界条件を示す．表中の  $\bar{u}_p$  は壁面第 1 節点での接線方向速度成分， $h_p$  は壁面第 1 節点の壁面直交方向の幅， $k_p$  は壁面第 1 節点での  $k$ ， $\varepsilon_p$  は壁面第 1 節点での  $\varepsilon$ ， $\tau_w$  は壁面のシアーストレスをそれぞれ表している．本解析に用いたメッシュは， $x, y, z$  方向に  $64 \times 30 \times 42$  分割，最小メッシュ幅は  $4.43 \times 10^{-2}L$  の不等分割メッシュを用いた．また，Reynolds 数は  $2.9 \times 10^4$ ，Prandtl 数は 0.71，Grashof 数は  $1.017 \times 10^9$ ，微小時間増分量は  $1.0 \times 10^{-3}$  とした．

#### (2) 解析結果

図 - 3 に各断面 (A ~ D) での  $y = 1.0$  における平均温度，平均流速分布を示す．温度分布は実験値と良好に一致して

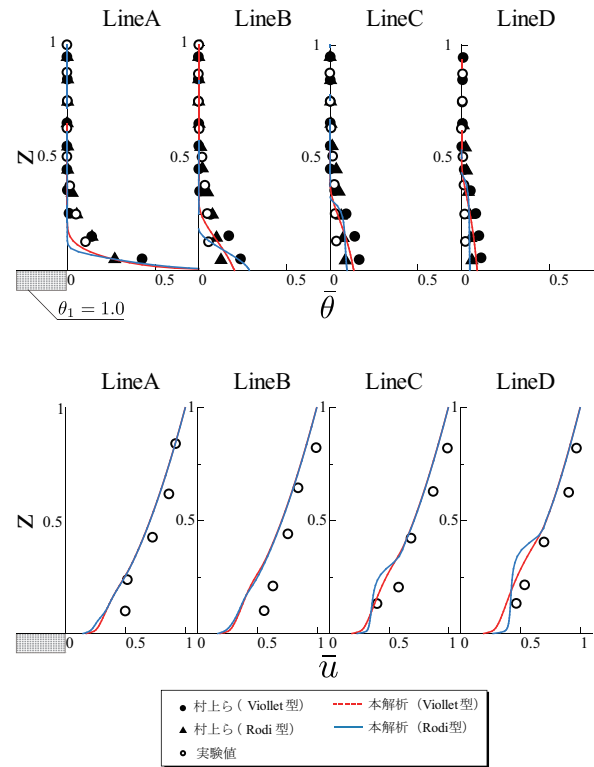


図 - 3 各断面における平均温度， $x$  方向平均流速分布 ( $y = 1.0$ )

いるが底面近傍の温度を過大に評価し，全体的に村上周三による解析値と比べ，過小に評価している．平均流速については  $z = 0.5$  以下で実験値よりも過小に評価しているが概ね一致している．

### 4. おわりに

本報告では，非等温場における RANS に基づく  $k - \varepsilon$  型 2 方程式モデルを用いた安定化有限要素法により地表面高温領域周辺気流解析を行い精度の比較検討を行った．その結果，既存の実験値および数値解析解と若干の差異が見られるものの，温度，流速分布は良好な一致を示し本手法の有効性が確認できた．今後は，さらに詳細に手法の妥当性および有効性について検討するとともに，熱収支を考慮した解析手法の構築を行う予定である．

#### 参考文献

- 1) T.E.Tezduyar:Stablized finite element formulations for incompressible flow computations, *Advance in Applied Mechanics*, 28, pp.1-44, 1992.
- 2) 村上周三, 大場正昭: 床面に温度差のある成層流の気流性状並びに拡散に関する風洞実験, 日本建築学会大会学術講演梗概集, pp.213-218, 1977.10
- 3) 野口康仁, 村上周三, 持田灯, 富永禎秀: LES,  $k - \varepsilon$  モデルによる地表面高温領域周辺の成層流の解析, 日本建築学会大会学術講演梗概集, pp.779-780, 1993.07.
- 4) M.Gabill and P.Viollet: The Three Dimensional Computation of Secondary Flow and Density Currents in A Curved Pipe, Refined Flow Modeling and turbulence Measurements. 3rd Int.Symp. 1988.
- 5) W.Rodi and M.S.Hossain: Turbulence Model for Buoyant Flow and its Application to Vrttical Buoyant Jets, *Turbulence Buoyant Jets and Plumes HMT-Series*, Vol.6, Pergamon Press, Oxford England, 1982.