

2次元不定流計算における複数の安定解の存在について

中央大学大学院 正会員 ○本永 良樹
中央大学理工学部 フェロー会員 山田 正

1. はじめに

河道流れの2次元不定流計算を行う際、計算の安定性の観点から時間格子幅 Δt や空間格子幅 Δx , Δy が決定される。近年普及してきた汎用数値解析ソフトでは基礎式の離散化手法として陰解法が用いられていることが多く、これらのソフトを用いた2次元不定流計算では、極端な値でない限り Δt の大きさは計算の安定性には影響しない。しかし

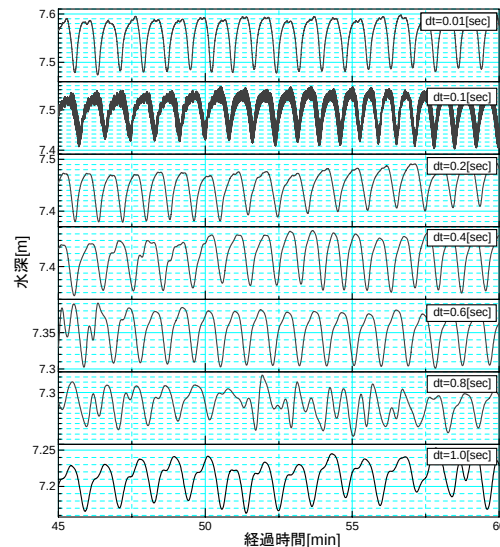
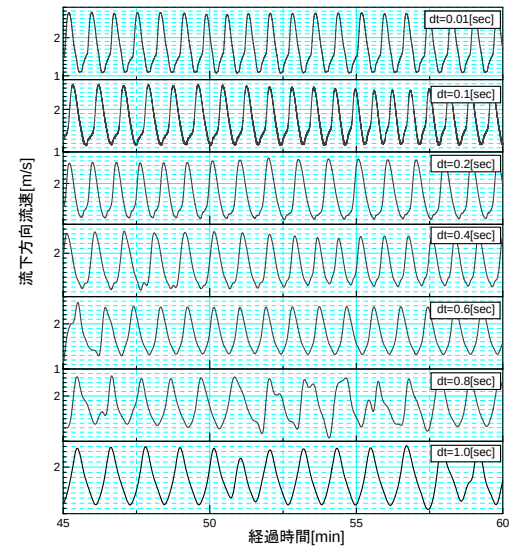
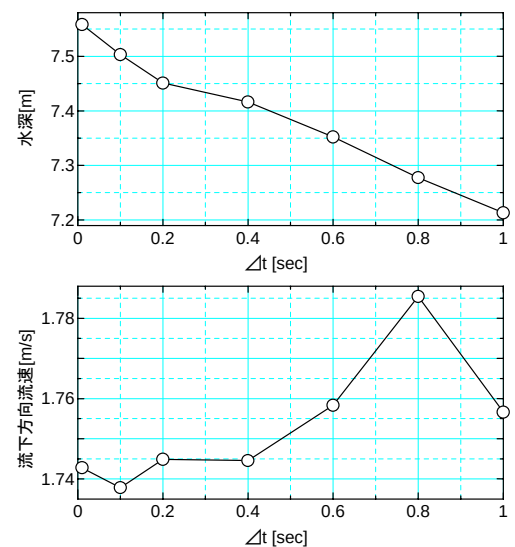
ながら河道流れには様々なスケールの乱れ（例えば複断面開水路流れに生じる大規模水平渦等）が存在しており、 Δt の大きさによっては、計算は安定しても、得られる結果が異なることも考えられる。著者らは複断面開水路流れに生じる大規模水平渦に関して2次元不定流計算を実施する際、同一の流れ場を対象とした同一の基礎式、離散化手法による計算でも Δt を変えることで異なる複数の安定解が得られることを発見した。本稿ではこのことについて報告するとともに、 Δt の違いにより2次元不定流計算の解が異なるという結果は著者が使用したモデルの特殊性等に起因するものではなく、数値計算において一般的なものであることをローレンツ・モデルを使用して示す¹⁾。

2. 研究内容

両側複断面開水路流れに生じる大規模水平渦について2次元不定流計算を実施した。基礎式としては流下方向、横断方向の運動方程式及び連続の式を用いた。基礎式はADI法を用いて陰的に解いている。境界条件は上流端で流量一定、下流端で水位一定、水路側壁ではSlip条件を用いた。渦動粘性係数にはSmagorinskyモデルを使用した。不定流計算は Δt の値を0.01~1.0secの間で変えて数パターン行った。いずれのパターンでも $\Delta x = \Delta y = 1.0\text{m}$ である。対象とした両側複断面開水路の諸元は、低水路幅、両側の高水敷幅がともに15m、高水敷高さ3m、水路床勾配1/1000、Manningの粗度係数は低水路0.015、高水敷0.01とした。次にローレンツ・モデルに含まれる独立変数の時間的な変化について数値計算を実施した。ローレンツ・モデルはNavier-Stokes方程式から導かれた熱対流のモデルとなる微分方程式系である。ローレンツ・モデルは次式で表される。

キーワード 2次元不定流計算, 時間格子幅 Δt , 複数の安定解, ローレンツ・モデル

連絡先 〒203-0051 東京都文京区春日 1-13-27 中央大学大学院 TEL 03-3817-1805 E-mail: [ymotonaga@civil.chuo-u.ac.jp](mailto:yмотonaga@civil.chuo-u.ac.jp)

図1 各 Δt に対応する水深の時系列図図2 各 Δt に対応する流下方向流速の時系列図図3 各 Δt に対応する水深, 流下方向流速平均値

$$dX/dt = -\sigma X + \sigma Y, \quad dY/dt = -XZ + \gamma X - Y, \quad dZ/dt = XY - bZ$$

モデル内に含まれる 3 つの独立変数 X, Y, Z の時間変化について、 Δt を変えて数値計算を実施した。時間差分にはルンゲ・クッタ法を用いた。モデル内のパラメータは $\sigma=10$, $\gamma=26$, $b=8/3$ とした。

3. 研究結果

3-1. 2次元不定流計算結果：2次元不定流計算により対象とした複断面開水路流れ内の大規模水平渦が表現できた。このとき低水路・高水敷境界部（以下、境界部と呼ぶ。）付近では水平渦中心部の通過に伴う水深、流速の変動が生じる²⁾。図1、図2はそれぞれ異なる Δt を用いた不定流計算における境界部での水深、流下方向流速の時系列の比較図である。大規模水平渦の通過に伴う水深、流速の変動は Δt が小さい時は規則的であるが、大きくなるにつれて規則性が失われる。図3は図1、図2で示した各 Δt に対応する境界部での水深、流速の時間平均値である。 Δt が大きくなるにつれて境界部水深の平均値が小さくなる。逆に境界部流速の平均値は、ばらつきがあるものの Δt が大きくなるにつれて増大する傾向がある。このように同一の流れ場を対象とし同一の基礎式、離散化手法を用いた2次元不定流計算でも、 Δt の値が変わることで、複数の安定した解が存在することがわかった。

3-2. ローレンツ・モデルの解析結果

既述したローレンツ・モデルについて、異なる Δt を用いて変数 X, Y, Z の時間変化について計算した。図4は各 Δt に対応する変数 X の時間変化の比較図である。 Δt の値によらず変数 X の時間変化は不規則的であるが、 Δt が大きくなるにつれて不規則性がより強くなる。この傾向は他変数 Y, Z の時間変化について

も見られた。図5は各 Δt に対応する変数 X, Y, Z の時間平均値である。 Δt が異なると各変数の平均値が異なることがわかる。変数 X, Y の平均値についてはばらつきが大きい、 $\Delta t=0.01\text{sec}$ 付近で最大値を取る傾向が見られる。変数 Z の平均値は Δt が大きくなるにつれて増大する傾向がある。これらの結果は複断面開水路流れを対象とした2次元不定流計算結果において、 Δt を変えることで変数である水深、流速の変動の様子やそれぞれの平均値が変わること、つまり複数の安定解が存在したと合致していると考えられる。

4. まとめ

本研究により得られた知見を以下にまとめる。1) 複断面開水路流れに生じる大規模水平渦のような非定常流れについての2次元不定流計算において、同一流れ場を対象として同一の基礎式、離散化手法を用いた場合でも Δt の値により異なる複数の安定解が存在する。

5. 今後の課題

本研究の結果から、時間格子幅 Δt の大きさについては不定流計算の安定性の観点のみからでは検討が不十分と思われるが、それは今後の課題である。参考文献：1) Letellier・Mendes: Robust discretizations versus increase of the time step for the Lorenz system, CHAOS 15, 013110 (2005), 2) 武内・本永・海野・山田：複断面開水路流れにおける大規模水平渦の発生と発達，水工学論文集，第47巻，pp. 475-480, 2003

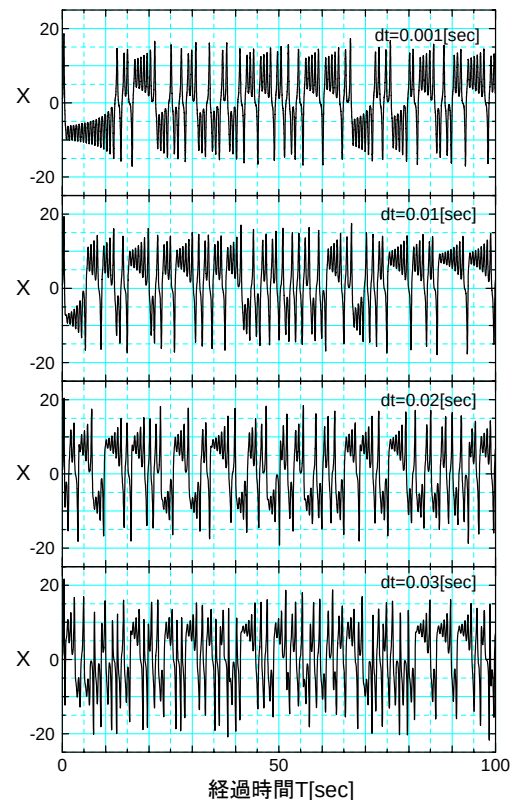


図4 各 dt に対応する変数 X の時間変化
(ローレンツ・モデルの解析結果)

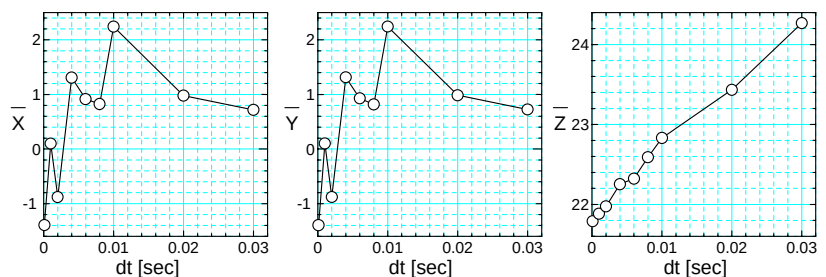


図5 各 dt に対応する変数 X, Y, Z の時間平均値
(ローレンツ・モデルの解析結果)