四分木構造格子を導入した浅水流方程式の数値解析法

新潟大学災害復興科学センター　正会員　安田 浩保
新潟大学大学院自然科学研究科　学生会員　○星野 剛

1. はじめに

河道の流況解析や河床変動解析においては、最低位の条件として河道形状を忠実に表現することが要求される。この要求に対し、構造格子型と非構造格子型の二つに大別される様々な境界適合の手法がこれまでに提案されてきた。

水工学の分野における構造格子型の先駆的な取り組みとしては、清水[1)]による一般座標を導入した計算方法が挙げられよう。一般座標の格子構成では、横断形状の測線を平面的に配置して得られる幾何形状を基本的な格子構成とすることが多い。こうして得られる格子構成は広範な自由度を有し、数値解析の適用範囲を飛躍的に拡張することに大きく貢献してきた。その一方で、河道の湾曲部の曲率が大きい場合や、分岐・合流を繰り返すような場合では、構造格子型の宿命で境界適合のために生じる格子構成の歪曲が境界適合と無関係の計算領域の内部にまで及び、計算の精度や安定性の低下の大きな要因となる。このような歪曲を緩和するための最適化手法が提案されているものの、格子構成パターンは無限のため、解析目的に適した格子構成を得るまでに相当な試行錯誤を行わなければならない。最近では、内田ら[2)]や安田ら[3)]が直交座標系を基本としながら幾何学的な工夫を凝らして巧妙に境界適合する方法を提案している。彼らの方法では格子構成が一意に決定されるところにひとつの優位性がある。

非構造格子型の計算方法については、前野ら[4)]や重枝ら[5)]などが有限体積法と流束差分離法に基づく手法を提案して、解析精度と境界適合の汎用性が高いことを示している。これらの計算方法を解析対象に応じて使い分けたり組み合わせることで水工学分野において求められる境界適合はおおむね満足されつつある。

近年、レーザーや超音波などのセンサ技術を応用した計測手法が急速に発達して、氾濫原、河道の平面形状および河床形状が高解像度の面的情報として取得されるようになってきた。本研究では、近い将来に数値的な水理解析の基礎情報の主流となると考えられる高解像度の面的情報を構造格子型計算法において効率的に活用するための格子構成法およびこれに基づく数値計算法について論じる。

2. 四分木構造に基づく格子構成法

(1) 四分木構造格子による幾何形状の表現

四分木構造とは2次元空間を再帰的に4つに分割した構造を指し、空間情報の観点では局所的に解像度を増減させることが可能な柔軟かつ効率的なデータ構造である。換言すると、構造的な分割規則に基づき格子面積が規定された多層の格子層により構成され、同じ層内の格子同士には兄弟関係、異なる層間では親子関係を有する格子の多層的な重ね合わせ構造と言える。

図–1 に四分木格子を用いて赤線で示された幾何形状を高解像度に表現した一例を示した。この図の例では、もっとも格子面積が大きいものを基準として、格子面積を $1/4^1$、$1/4^2$、$1/4^3$、$1/4^4$、と順に小さくした合計で5種類の大きさの格子を用いて幾何形状を表現している。この表記に従うと格子面積が最大のものは $1/4^0$ と書ける。以降、本論文ではべき乗の値を L として、各格子面積レベルをレベル0などと表記する。

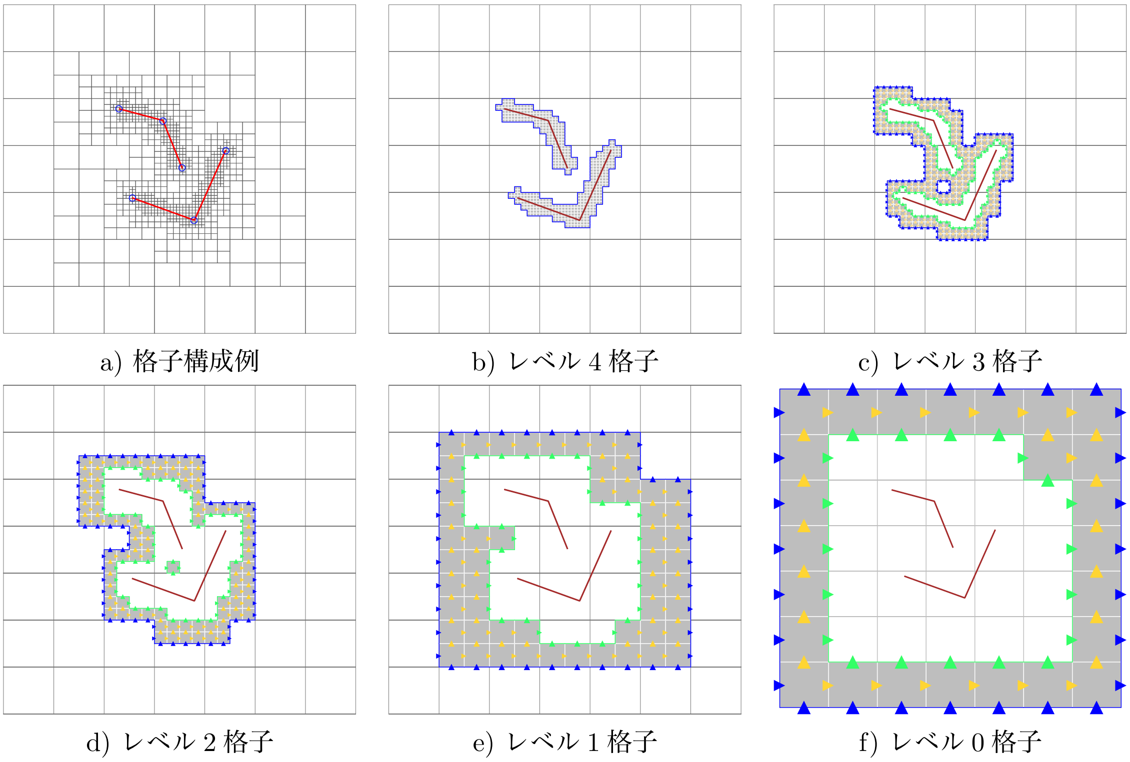
各レベルでの格子数はこの例の場合では、レベル0から4の順に34、85、140、320、662個の格子が用いられている。この領域例をすべてレベル4の格子で覆うと格子数は12000程度となり、レベル0から4の格子を組合わせた格子構成時の格子総数は10%以下にまで縮減されていることになる。この格子数の縮減の傾向は計算対象領域が広くなるほどに一層顕著となる。

同図に示したように、四分木構造格子を用いた幾何形状の表現方法は、柔軟かつ効率的である。この方法を適用することで、複雑な形状をした計算領域の境界適合、線状の内部境界などの表現、局所的な解像度の向上などが可能であること分かる。本論文では、特に、境界形状の高解像度化に焦点を絞った議論を展開する。

(2) 自動構成法の概要

水理解析において四分木構造に基づく格子構成を導入するためには、a) 四分木構造格子の生成、b) 格子面積レベル間の接続関係の定義、c) 各格子面

Key Words: 境界適合，数値計算，四分木構造格子，蛇行流路
〒950-2181 新潟市西区五十嵐2の町8050　TEL 025-262-7053



図–1 四分木格子による幾何表現と水理解析のための計算点配置とレベル間の接続関係

積レベル毎の標高情報、以上 3 つについてあらかじめ準備する必要がある。四分木構造型の格子構成により広範な問題を解析していくことを考えると、計算機を用いるなどして自動的に生成されることが望ましい。本研究では、できるだけ簡便かつ少量の情報のみから四分木構造格子群を自動生成する方法を以下に考案した。

考案した自動生成法の入力情報は、境界適合や局所的な高解像度化を実施する位置指定の座標値あるいは境界などを表す線分を構成する座標値、計算領域を定義するための座標値、レベル 0 の格子長、レベル 0 格子の分割階層数のみである。これらのわずかな入力情報だけから以下のすべての処理を実行可能なように設計した。なお、以下で論じる格子構成の手順は、スタッガード格子を用いた 2 次元計算のための計算格子の生成を前提としている。

a) 四分木構造で構成された格子層の自動生成

まず、格子面積が最小のレベル L の格子層と入力された一連の線分座標との交点座標を求める。つぎに、求められた交点座標を包含するレベル L の格子およびこの格子を包含する $L-1$ の親格子を検索して、この $L-1$ 層の格子に内包される L 層内の着目格子と兄弟関係にある 3 個の格子の検索を行う。このような親子関係と兄弟関係の検索を格子面積が最小のレベル L からレベル 0 の格子層の順に行う。

b) 格子面積レベル間の接続関係と計算順序

前項で行った検索処理は、各格子層の水位計算点を定義したことと同義である。四分木格子構造による水理解析を行うためには、水位計算点の定義に加え、流速計算点の定義とそれらの種別判定が必要となる。

図–1 の c) から f) に示したとおり、各レベルの格子層は図中の外周では自身よりも格子面積がひとつ大きな格子層と、内周では自身よりも格子面積が小さい格子層と接合される関係にある。この関係性に着目すると、スタッガード配置される計算点は自ずと 3 種類に分類されることが分かる。まず、外周と内周に面しない計算点は外周や内周に関わらず計算領域内部の計算点として取り扱え、境界条件を課すことなく支配方程式から算出される。つぎに、内周上に配置される計算点は、格子面積レベル L と $L+1$ の外周上に配置された計算点の 2 つの計算点と空間的に重複していることに着目し、この計算点は支配方程式からではなく、

$$f(i_L, i_L) = f(i_{L+1}, j_{L+1}) + f(i_{L+1}, j_{L+1}+1)/2 \quad (1)$$

として求める。ここに、f は任意の物理量、$(i_L,\ j_L)$、$(i_{L+1},\ j_{L+1})$ は格子面積レベルがそれぞれ L と $L{+}1$ の水平方向と鉛直方向の格子番号である。一方で、格子面積レベル L の外周上に配置された計算点は、ひとつ外周側に位置する格子面積レベル $L-1$ の計

算済の水位を境界条件として支配方程式から算出される。

前述までの格子面積レベルの接合関係を踏まえると、計算は各格子面積レベルごとに行えばよく、格子面積レベルの計算順序は 0 から L に向かって行うことで適切な境界条件を課した計算となる。

3. 数値計算法

(1) 支配方程式

各面積レベルの格子層の座標系は直交座標系で記述される。それぞれの層内における x，y 方向の流量フラックス，水位は以下の式 (2) から (4) の浅水流方程式により計算される。

$$\frac{\partial h_k}{\partial t}+\frac{\partial M_k}{\partial x_k}+\frac{\partial N_k}{\partial y_k}=0 \tag{2}$$

$$\frac{\partial M_k}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{{M_k}^2}{h_k}\right)+\frac{\partial}{\partial y_k}\left(\frac{M_kN_k}{h_k}\right)+gh_k\frac{\partial H_k}{\partial x_k}= -\frac{\tau_{xb}}{\rho}+\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\nu_t\frac{\partial M_k}{\partial x_k}\right)+\frac{\partial}{\partial y_k}\left(\nu_t\frac{\partial M_k}{\partial y_k}\right) \tag{3}$$

$$\frac{\partial N_k}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{M_kN_k}{h_k}\right)+\frac{\partial}{\partial y_k}\left(\frac{N_k^2}{h}\right)+gh_k\frac{\partial H_k}{\partial y_k}= -\frac{\tau_{yb}}{\rho}+\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\nu_t\frac{\partial N}{\partial x_k}\right)+\frac{\partial}{\partial y_k}\left(\nu_t\frac{\partial N}{\partial y_k}\right) \tag{4}$$

ここで，M,N は x，y 方向の流量フラックス，t は時間座標，x,y は平面座標，h は水深，g は重力加速度，H は水位、τ_{xb},τ_{yb} は x，y 方向の底面せん断応力，ρ は水の密度，ν_t は渦動粘性係数、それぞれの変数に下添えされた k は格子面積レベルである.

(2) 数値計算法

これらの式の数値計算は、連続の式、運動の式ともにスタッガード格子に基づく 2 次精度の Leap–Frog 法を適用した。

4. 蛇行流路に関する水理実験の再現計算

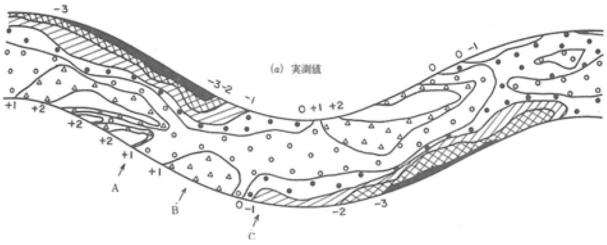
本研究において新たに開発された流況解析法の妥当性を検証するために実現象との比較を行う。ここでは、河川の本来的な特徴である蛇行部に置ける流況の面的な特性を把握することを目的に、以下に示した蛇行流路に対する室内実験を比較対象とすることにした。

(1) 水理実験の概要

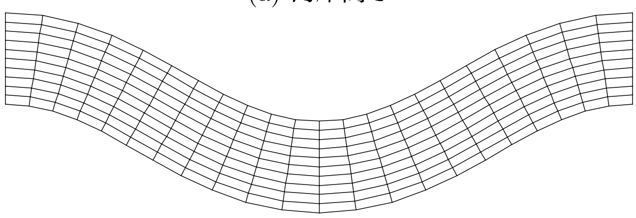
長谷川ら[6),7),8)]は、蛇行流路における流れの性質を調べることを目的に蛇行流路の移動床実験を行った。彼らは、式 (5) で表現される sine-generated curve の形状の水路を用いて種々の条件で実験を行った。

表–1 水理実験の諸条件

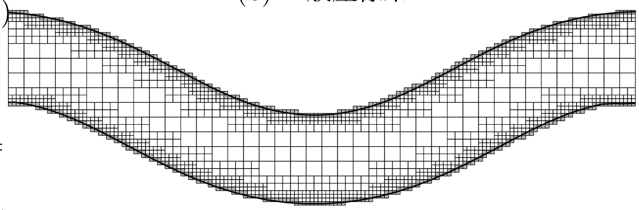
$\tilde{L}$	$\tilde{B}$	θ_0	bed gradient	Q
220cm	30cm	30°	0.00333	1.87l/s



(a) 河床高さ



(b) 一般座標系



(c) 四分木構造格子

図–2 計算格子

$$\theta=-\theta_0\sin\frac{2\pi}{\tilde{L}}\tilde{s} \tag{5}$$

本研究では、**表–1** に示した ME–2 と呼ばれる実験の再現計算を行うことにした。ここに、$\tilde{L}$ は蛇行長、$\tilde{B}$ は流路幅、θ_0 は蛇行角、また、同表中の Q は上流端から供給する定常流量である。

本研究では、四分木構造格子の計算特性を評価するために、この水理実験の再現計算を行った。四分木構造格子、一般座標系のいずれの再現計算に対してもこの定常状態における河床形状を固定床として与えた。

(2) 計算格子

図–2 の a) に示した水路を四分木構造格子、一般座標系のそれぞれで数値計算するにあたり、計算格子を**図–2**b),c) に示す通り設定した。

図–2 c) に示した四分木構造の計算格子は、基本となるレベル 0 の格子を水平方向、鉛直方向とも

に 5cm の正方格子に設定した。境界部における最小格子はレベル 4 に設定し、辺長 0.625cm の格子で境界部を表現している。

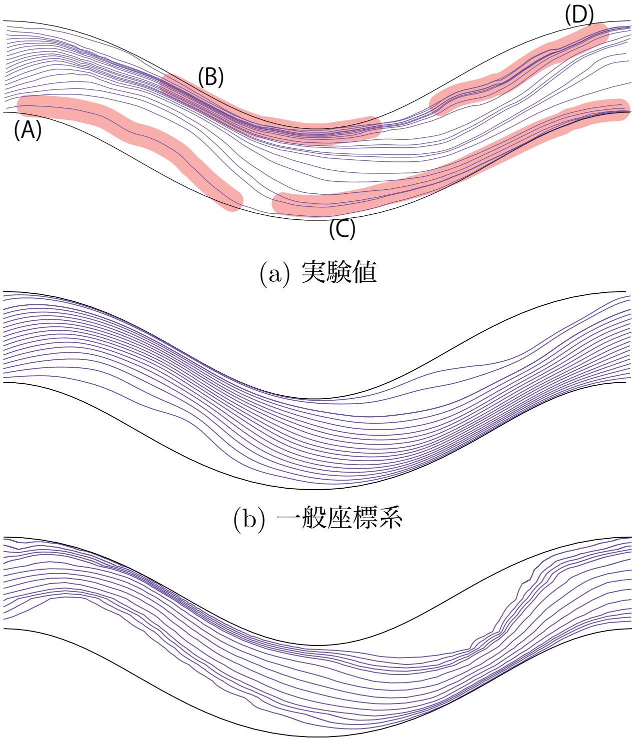
5.　再現計算の結果

実験値および一般座標、四分木構造格子の計算結果を流線により**図–3** に示した。**図–3** a) に示した実験値から得られた流線には図中の A) から D) に示す以下の特徴がある。(A) 上流右岸の砂州を迂回する流れ、(B) 曲長部左岸側への流れの集中、(C) 曲頂部で通水幅が広がり、下流では右岸に沿う流れ、(D) 下流左岸の砂州を迂回する流れ、以上の 4 つである。特に (B) は、流路の最短距離を流れようとするこの実験条件における大きな特徴である。

実験値と**図–3** b), c) に示した一般座標系と四分木構造格子における計算結果を比較する。ただし、四分木構造格子の流線が砂州近傍で滑らかでないのは今回採用した流線の可視化手法による影響であり、格子解像度の接続部で滑らかに見えない。流線を比較するとどちらも傾向は一致しており、流況を概ね再現していることがわかる。細部に着目すると (A) の流れは四分木構造格子では砂州の影響を過大に受けており、一般座標系のほうが実験値をより忠実に再現している。(B) の流れはどちらの計算も左岸による傾向を示しているが、流れの集中の程度を見ると四分木構造格子のほうが再現性が高い。(C) の流れはどちらも右岸による傾向を示すが、四分木構造格子では実験値よりも流れの外岸への集中が大きく表現されており、一般座標系のほうが再現性が高いことがわかる。(D) の流れでは実験値に対して四分木構造格子での計算は砂州が流れに及ぼす影響を過大評価している。一方でその後の左岸への流れの集中は四分木構造格子における計算のほうが実験値により忠実である。以上を踏まえた全体的な四分木構造格子における計算結果は一般座標系によるものと同程度の再現性を示し、計算が妥当であることが確認できる。さらに，四分木構造格子における計算結果では蛇行進展を考慮する上で重要な (B) の流れがより忠実に再現されている点で優位性があると考えられる。

6.　おわりに

この計算法では局所的な高解像度化を非常に容易に実現することが可能である。この特徴は、境界形状の適合の他に流水中に存在する構造物や中州などの不透過領域の解析への反映を飛躍的に簡便な手続きで実現することを意味している。それだけにとどまらず、河床形状の急変領域など適切かつ効率的な解析の反映も同時に約束している。このような解析密度の向上は、精度向上に寄与するばかりか、計算結果の 2 次的利用においても非常に有益となる。例えば、水際の構造物の設計や生物の営巣環境評価などの幅広い応用が期待される。



(a) 実験値

(b) 一般座標系

(c) 四分木構造格子

図–3　計算結果

参考文献

1) 清水康行：一般座標系を用いた 2 次元流れと河床変動の計算，土木学会年次学術講演会講演概要集第 II 部，No.46, pp.634–635, 1991.
2) 内田龍彦，河原能久：二次元浅水流の保存型 CIP 陽解法の開発とその検証，応用力学論文集，Vol.9, pp.917–924, 2006.
3) 安田 浩保・清水康行：座標軸非依存の部分境界適合法による蛇行流路の数値計算，土木学会水工学論文集, 第 52 巻, pp.1003–1008, 2008.
4) 前野詩朗，小川信：非構造格子有限体積法による水理構造物周辺流れの数値解析， 応用力学論文集，Vol.6, pp.857–864, 2003.
5) 秋山壽一郎，重枝未玲，浦　勝：非構造格子を用いた有限体積法に基づく 1 次および 2 次精度平面 2 次元洪水流数値モデル，土木学会論文集，No.705/II-59, pp.31-43，2002.
6) 長谷川和義：沖積蛇行の平面および河床形状と流れに関する水理学的研究，北海道大学博士論文，184.p., 1984.
7) 長谷川和義, 山岡勲, 田中直人：蛇行蛇行の影響を受けた河床波の形状特性，土木学会北海道支部論文報告集第 II 部，第 38 号, 1982.
8) 長谷川和義, 山岡勲, 鈴木康正：蛇行流路における河床波上の流れ，土木学会北海道支部論文報告集第 II 部，第 38 号, 1982.