

降雨流出解析におけるパラメータの新しい推定手法の提案

中央大学理工学部 学生員 ○ 吉見 和紘
中央大学大学院 正会員 渡辺 直樹
中央大学大学院 正会員 渡邊 暁人

中央大学理工学部 学生員 内藤 ゆりか
中央大学理工学部 フェロー会員 山田 正

1. はじめに

従来から降雨流出を表現するモデルは数多く提案されている。しかし、降雨流出モデルに用いるパラメータは過去の水文資料から推定するため、パラメータの不確実性が常に存在し一意的に決定することは困難である。

本論文では新たに提案する 3 つの手法を用いて、実測流量データと実測降雨データから、単一斜面における一般化した降雨流出の基礎式における流出パラメータを推定する。また、推定したパラメータにより有効降雨ハイトグラフ、ハイドログラフを表現し、総降雨量と推定した総有効降雨量との関係から、様々な降雨における有効降雨を簡易的に決定する指標を示す。

2. 単一斜面における降雨流出の基礎式の概念

2-1. 単一斜面における降雨流出の基礎式

著者ら¹⁾は従来から、単一斜面における降雨流出の基礎式を提案している。図-1 に降雨流出機構の概念図を示す。以下にこの基礎式を示す。山地流域における降雨流出は様々な形態を取るとし、水深のべき乗で表現する一般化された運動則 (1) 式を用いる。連続式として (2) 式を用い、(2) 式と (1) 式より単位幅流量 q についての (3) 式を得る。

$$v = \alpha h^m, \quad q = vh = \alpha h^{m+1} \quad (1)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = r(t) \quad (2)$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \alpha q^\beta \frac{\partial q}{\partial x} = \alpha q^\beta r(t) \quad (3)$$

$$\text{ただし, } a = (m+1)\alpha^\beta \quad (4), \quad \beta = \frac{m}{m+1} \quad (5)$$

ここに、 v : 断面平均流速[m/h], h : 湛水深[m], q : 単位幅流量 [m^2/h], $r(t)$: 降雨強度[mm/h], α , m は流域特性を表すパラメータである。直接流出は流出

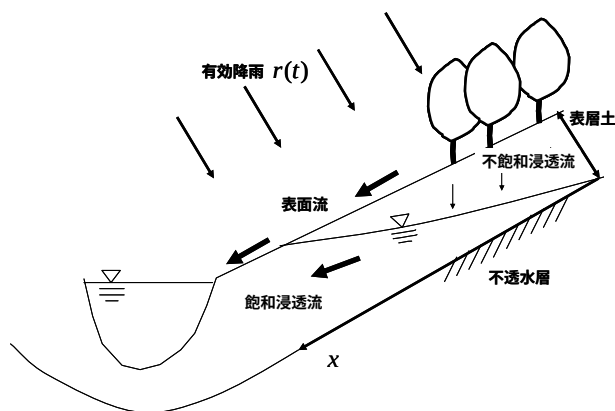


図-1 降雨流出機構の概念図

寄与域（河道及び河道近傍の湿潤領域）のみからの流出と考えると、斜面長は実地形上の斜面長より十分短いものと考えられ、(6) 式に示す変数分離形の近似式が仮定できる。

$$q(x, t) \cong x q_*(t) \quad (6)$$

ここに、 q_* : 流出高[mm/h]である。また、斜面長 L の末端で考え $x = L$ として (6) 式を用いると、偏微分方程式である (3) 式は (7) 式に示すように流出高に関する常微分方程式に変形できる。

$$\frac{dq_*}{dt} = a_0 q_*^\beta (r(t) - q_*) \quad (7)$$

$$\text{ただし, } a_0 = aL^{\beta-1} = (m+1)\alpha^{\frac{1}{m+1}} L^{\frac{-1}{m+1}} \quad (8)$$

ここに、 L : 流出寄与域斜面長である。(7) 式が一般化された単一斜面からの降雨流出の基礎式となる。これ以降本論文では (7) 式を集中定数系方程式と呼ぶ。また、本論文では有効降雨を以下 (10) 式にて表現する。この有効降雨は、実測の降雨データに対して 1 次補間を行ったものに降雨の遅れ時間を考慮するため (9) 式に示す UnitStep 関数を乗じ、さらに時々刻々の流出率を乗じて表現している。

$$U(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ 1 & (x \geq 0) \end{cases} \quad (9)$$

$$r(t) = R(t) \cdot U(t-d) \cdot (1 - e^{-f \cdot (t-d)}) \quad (10)$$

ここに、 $R(t)$ ：実測の時間降雨データを1次補間した関数、 d ：降雨開始から降雨流出までの遅れ時間、 f ：流出パラメータであり、集中定数系方程式(7)式を(11)式のように表現する。

$$\frac{dq_*}{dt} = a_0 q_*^\beta (R(t) \cdot U(t-d) \cdot (1 - e^{-f(t-d)}) - q_*) \quad (11)$$

2-2. 流域特性を示すパラメータ α , m の物理性

著者ら²⁾は、不飽和浸透理論と Kinematic Wave 法の式展開を比較することで、流域特性を表すパラメータ α , m を(12), (13)式のように土壌・地形特性のみから決定できることを示している。

$$\alpha = \frac{k_s i}{D^{\gamma-1} w^\gamma} \quad (12) \quad m = \gamma - 1 \quad (13)$$

ここに、 k_s ：飽和透水係数[cm/s]、 i ：斜面勾配、 D ：表層土層厚[mm]、 γ ：土壌の透水性を表す無次元パラメータ、 w ：有効空隙率である。

2-3. ハイドログラフ逓減部から解析的に得られるパラメータ

著者ら²⁾は、単一斜面における降雨流出の基礎式である集中定数系方程式(7)式より流出高逓減部の解析解を理論的に導出し、実測のハイドログラフよりパラメータ a_0 , β の抽出を行っている。ここで、単一斜面における降雨流出の基礎式である集中定数系方程式(7)式における流出高逓減部の解析解の導出過程を以下に記す。

降雨終了後の逓減部の流出高 q_{*rec} について考え、時間 t は降雨終了時点を経原点とすると、 $r(t) = 0$ であるので(7)式は(14)式のように変数分離形となる。

$$\frac{1}{q_{*rec}(t)^{\beta+1}} \frac{dq_{*rec}(t)}{dt} = -a_0 \quad (14)$$

$\beta \neq 0$ 、初期条件 $q_{*rec}(0) = q_{*0}$ より逓減部の流出高 q_{*rec} について整理すると以下(15)式に示すように流出高逓減部の解析解を得る。

$$q_{*rec}(t) = \frac{q_{*0}}{(1 + a_0 \beta q_{*0}^\beta t)^{1/\beta}} \quad (15)$$

3. 流出パラメータの決定

3-1. 流出パラメータの決定

以下に示す3手法により集中定数系方程式(11)式におけるパラメータを推定する。推定手法には非線形最小二乗法を用いた。対象流域は流域面積 254 km^2 の

利根川水系草木ダム流域であり、パラメータの推定で対象とした降雨は、1985年6月から2009年8月までの総降雨量 100 mm 以上の降雨22ケースである。

(a) パラメータ a_0 , β の推定に流出高逓減部の解析解を用いる(手法1)

手法1では、まず流出高逓減部の解析解(15)式に対して非線形最小二乗法を用いることでパラメータ a_0 , β を推定する。次にそのパラメータを集中定数系方程式(11)式に代入し、(11)式に対して非線形最小二乗法を用いることでパラメータ d , f を推定する。

(b) パラメータ a_0 , β の決定に物理性を考慮(手法2)

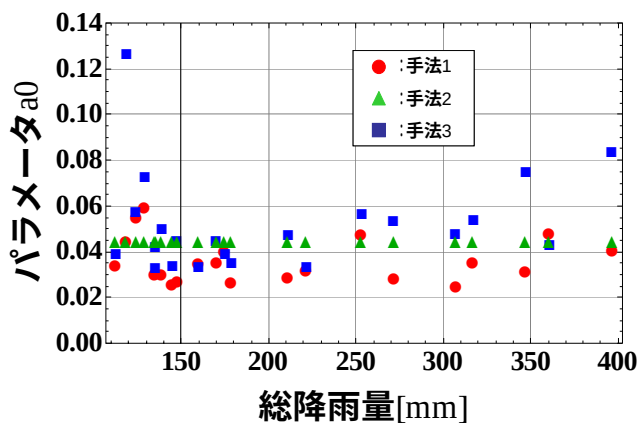
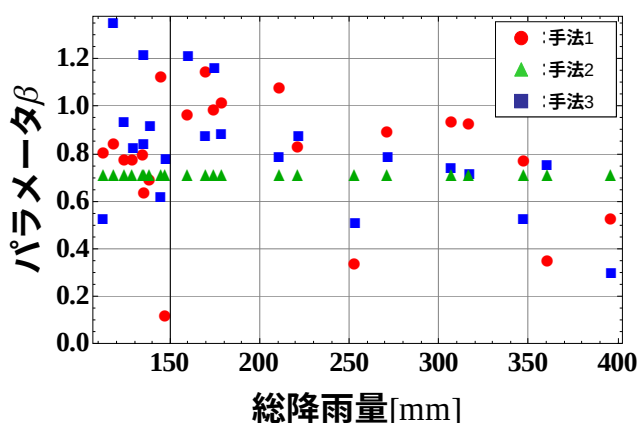
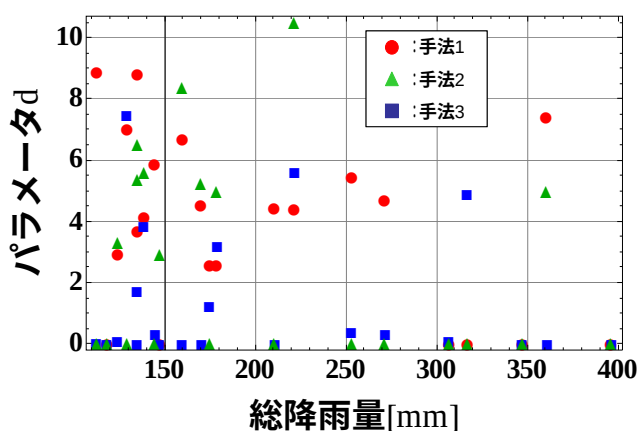
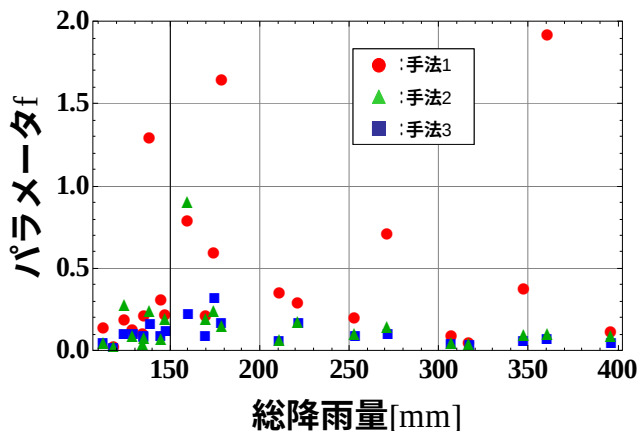
手法2では、(12), (13)式に示した土壌・地形特性を示すパラメータ α , m 中のパラメータを既知量として与える。上記の土壌・地形特性を示すパラメータを斜面長 $L = 30000 \text{ [mm]}$ 、抵抗則 $m = 2.5$ 、表層土層厚 $D = 200 \text{ [mm]}$ 、有効空隙率 $w = 0.42$ 、飽和透水係数 $k_s = 0.02 \text{ [cm/s]}$ 、斜面勾配 $i = 15^\circ$ として与え、パラメータ a_0 , β を物理的に決定する。これにより、斜面流において飽和・不飽和浸透流を対象とする場合に、土壌・地形特性パラメータより a_0 , β を決定することができる。そのパラメータ a_0 , β を集中定数系方程式(11)式に代入し非線形最小二乗法を用いてパラメータ d , f を推定する。

(c) すべてのパラメータを一括して推定(手法3)

手法3では、集中定数系方程式(11)式に対して非線形最小二乗法を用いることで一括してパラメータ a_0 , β , d , f を推定する。

3-2. 各流出パラメータの特性

図-2に示すように、手法1は他の2つの手法に比べて、パラメータ a_0 の値を小さく評価する傾向にある。また、多少のばらつきはあるものの、パラメータ a_0 は $0.02 \sim 0.06$ 程度の値を取ることがわかる。パラメータ d , f において、手法1が他の2手法に比べて、値を大きく評価する傾向にあることもわかった。これは、パラメータ a_0 の値を小さく評価しているため、そのパラメータを補正するように大きな値を取ることが考えられる。また、図-3に示すパラメータ β の評価に関して、手法1と手法3では、実測のハイドログラフの逓減部が切り立っている場合の多くで $\beta > 1$ という範囲の値をとることがある。物理性を考えると(5)式に示すよう

図-2 パラメータ a_0 と総降雨量の関係図-3 パラメータ β と総降雨量の関係図-4 パラメータ d と総降雨量の関係図-5 パラメータ f と総降雨量の関係

に、 β の取りうる範囲は0～1であるため、この推定値は明らかに異常値であるといえる。手法1と手法3ではパラメータ a_0 、 β に物理性を考慮していないため、このような結果となった。今後も各降雨におけるハイエトグラフ、ハイドログラフの比較によりその性質を明らかにする必要がある。

4. 有効降雨の推定

本節では、3手法により推定したパラメータを用いてそれぞれの有効降雨を表現する。これにより、3手法による有効降雨の表現の違いを明らかにする。また、3手法において総降雨量と推定した総有効降雨量との関係より、様々な降雨における総有効降雨量を簡易的に決定する指標を示す。

図-6は、3手法により推定したパラメータを用いて表現した有効降雨と流出高を、それぞれ実測値と重ねたグラフの1例である。実測のハイドログラフと3手法のハイドログラフを比較すると、波形が一致しており、集中定数系方程式(11)式はどの推定手法を用いて

も、実測のハイドログラフをよく表現していると言える。また、手法1と手法3は物理性を考慮していないが、物理性を考慮した手法2のハイドログラフとよく一致していることは興味深い。

しかしながら、図-5に示すパラメータ f に着目し、他の2つの手法と比較すると手法1では、パラメータ f を過大に評価する場合があった。パラメータ f は有効降雨の式(10)式において流出率のような役割を果たし、時々刻々の流出率を表現すると同時に、ハイエトグラフの立ち上がり方を表現している。つまり、パラメータ f の値が大きいほど、流出開始から短時間でその時刻における降雨が流出することを表現している。

このため、パラメータ f を大きく評価したケースの有効降雨のハイエトグラフは立ち上がり方が急であり、流出開始から短時間で実測のハイエトグラフと一致する。また、3手法において、パラメータ d 、 f は同時に推定されており、パラメータ d とパラメータ f の関係に着目すると、お互いに補正しあっているようなケ

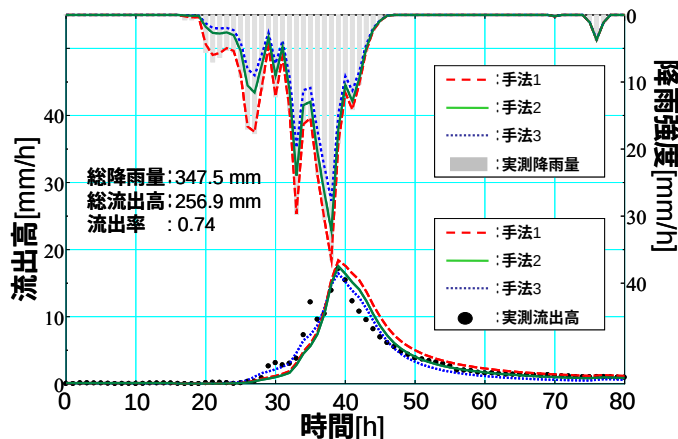


図-6 3手法により推定した有効降雨ハイトグラフと
ハイドログラフの一例

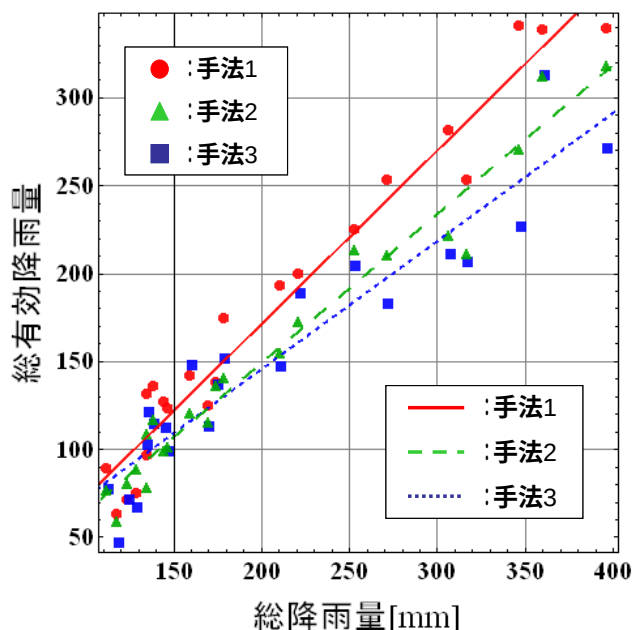


図-8 総有効降雨量と総降雨量の関係

ースも見られた。また、図-7 に示した有効降雨ハイトグラフは、推定した22ケースの中でも特徴的である。手法3は最大降雨強度が最も小さいにもかかわらず、推定された総有効降雨量は最も大きい。これは、手法3は遅れ時間を表すパラメータ d を他の2手法に比べて小さく推定しているため、降雨の立ち上がりが早いからであると考えられる。

図-8に示すのが、総降雨量と推定した総有効降雨量との関係である。実線と2本の破線は3手法により推定した総有効降雨量のプロットを直線近似したものである。これにより、1つの指標として、各総降雨量における総有効降雨量を一意的に決定できることを示した。また、推定手法の違いによりそれぞれ、手法1では総降雨量に対して総有効降雨量を8割～9割に推定し、手

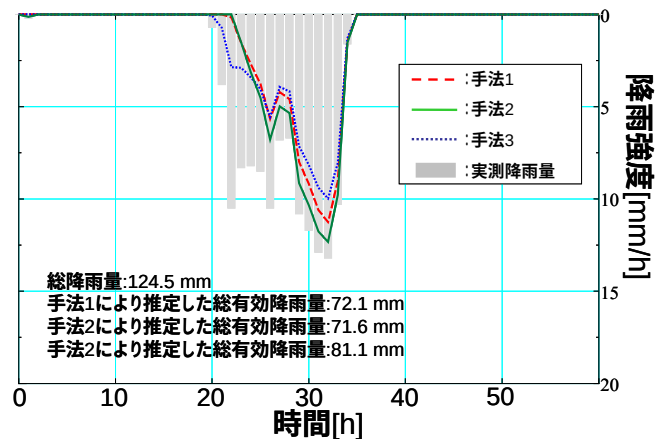


図-7 3手法により推定した特徴的な有効降雨
ハイトグラフの一例

法2では7割～8割に推定し、手法3では7割5分～8割に推定することがわかった。

今回対象とした総降雨量100mm以上の降雨では、推定に用いた過程によって多少のばらつきはあるものの、総降雨量に対して総有効降雨量は7割～9割程度の範囲に収まることが明らかになった。

5. まとめ

本論文では、非線形最小二乗法を用いて3手法により各パラメータの推定を行った。ここに、得られた知見を述べる。

- 1) 手法1における流出パラメータ a_0 の値は他に比べ小さく評価される傾向にあり、流出パラメータ a_0 の取りうる範囲は0.02～0.06程度であることを示した。
- 2) 3手法により推定したハイドログラフは実測のハイドログラフと波形が一致しており、集中定数系方程式(11)式はどの推定手法を用いても、高い表現性を有している。
- 3) 3手法により推定した総有効降雨量は総降雨量に対して7割～9割程度の範囲に収まることが明らかになった。
- 4) 3手法により推定した総有効降雨量のプロットを直線近似することで、各降雨量における総有効降雨量を一意的に決定できることを示した。

<参考文献>

- 1) 呉修一，腰塚雄太，山田正：ハイドログラフの通減特性を用いた流出特性の抽出，水工学論文集，第48巻，2004年2月。
- 2) 山田正：山地流出の非線形性に関する研究，土木学会水理講演会論文集，Vol. 47，pp. 259-264，2003。