

安定化有限要素法による3次元平行平板間熱流体連成解析

中央大学 学生員 ○池田 哲也
中央大学大学院 学生員 石坂 俊輔
中央大学 正会員 檜山 和男

1. はじめに

流れの有限要素解析においては流出側境界の Neumann 型境界条件に Traction-free 条件を用いる場合が多い。しかし、この条件は熱を伴う場合においては熱が境界を横切って流出しないという断熱条件を表している。そのため、流出境界付近に熱が滞留し、不自然な流れが生じてしまう。

そこで、滑らかな流れの流出を実現するため、従来有限要素法解析で用いられてきた流出境界条件と中山らによって提案された流出境界条件処理法¹⁾を安定化有限要素法に基づく3次元熱流体連成解析に導入し、それらの比較検討を行った。

2. 数値解析手法

(1) 基礎方程式と離散化手法

非圧縮性粘性流体流れにおいて、基礎方程式に Boussinesq 近似を用いた無次元化された Navier-Stokes 運動方程式、連続式およびエネルギー方程式を用いる。

運動方程式:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{Gr}{Re^2} \Theta \delta_{i3} = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (1)$$

連続式:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (2)$$

エネルギー方程式

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} + u_i \frac{\partial \Theta}{\partial x_i} + \frac{1}{Pr Re} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x_i^2} = 0 \quad (3)$$

上式において、 u_i は x_i 方向の流速成分、 p は圧力、 Θ は温度、 δ_{i3} はクロネッカーのデルタ、 $Re (= UL/\nu)$ は Reynolds 数、 $Gr (= g\beta(T_w - T_c)L^3/\nu^2)$ は Grashof 数、 $Pr (= \nu/\alpha)$ は Prandtl 数である。また、 $Ra(Pr \times Gr)$ は Rayleigh 数を表す。ただし g は重力加速度、 β は体膨張係数、 Θ_w は高温壁温度、 Θ_c 低温壁温度、 U は代表速度、 L は代表長さ、 ν は動粘性係数、 α は温度伝導率である。

境界条件としては、次式が用いられる。

$$u_i = g_i \quad (\text{on } \Gamma_g) \quad (4)$$

$$\left(-p\delta_{ij} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right) n_j = h_i \quad (\text{on } \Gamma_h) \quad (5)$$

$$\Theta = \hat{\Theta} \quad (\text{on } \Gamma_\Theta) \quad (6)$$

$$\frac{1}{Re Pr} \frac{\partial \Theta}{\partial n_j} = S \quad (\text{on } \Gamma_S) \quad (7)$$

ここに、 Γ_g, Γ_h はそれぞれ、Dirichlet 境界および Neumann 境界を表し、 g_i, h_i は Γ_g, Γ_h 境界上での既知の流速、トラクションである。また、 $\hat{\Theta}$ は壁面既知温度、 S は壁面上の法線方向の温度勾配、 n_j は境界上の外向き単位法線ベクトルである。

基礎方程式 (1), (2), (3) 式に安定化有限要素法を適用し、P1/P1(流速・圧力・温度 1 次) 要素を用いて補間することにより有限要素方程式を得る。時間方向の離散化には、2 次精度である Crank-Nicolson 法を用い、連立一次方程式の解法には、Element-by-Element Bi-CGSTAB2 法を用いた。

(2) 流出境界条件処理法

本報告では流出境界において、Traction-free 条件及び中山らによって提案された流出境界条件処理法¹⁾を用いる。中山らの手法は、境界積分項を未知量として扱う、Free Outflow Boundary Condition(以下 F.O.B.C.)に Sommerfeld's Radiation Condition(以下 S.R.C.)を組み込んだ境界条件を適用するものである。F.O.B.C.をもとに境界積分項の定式化の際、流出境界外向き法線方向の単位法線ベクトルのみ考慮すると、以下の式を得る。

$$\int_{\Gamma_h} \omega_i \left\{ -p\delta_{ij} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right\} n_j d\Gamma = \int_{\Gamma_h} \omega_i \left\{ -p\delta_{i1} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_i} \right) \right\} n_1 d\Gamma \quad (8)$$

$$\int_{\Gamma_s} \omega S d\Gamma = \frac{1}{Re Pr} \int_{\Gamma_s} \omega \frac{\partial \Theta}{\partial x} n_1 d\Gamma \quad (9)$$

ここで、S.R.C.により得られる式を上式に代入する。

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = -\frac{1}{U_c} \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (10)$$

このことより、式 (8), (9) は以下のようにになる。

$$\int_{\Gamma_h} \omega_1 h_1 d\Gamma = - \int_{\Gamma_h} \omega_1 p d\Gamma - \frac{2}{Re U_c} \int_{\Gamma_h} \omega_1 \frac{\partial u}{\partial t} d\Gamma \quad (11)$$

$$\int_{\Gamma_h} \omega_2 h_2 d\Gamma = - \frac{1}{Re U_c} \int_{\Gamma_h} \omega_2 \frac{\partial v}{\partial t} d\Gamma + \frac{1}{Re} \int_{\Gamma_h} \omega_2 \frac{\partial u}{\partial y} d\Gamma \quad (12)$$

$$\int_{\Gamma_h} \omega_3 h_3 d\Gamma = - \frac{1}{Re U_c} \int_{\Gamma_h} \omega_3 \frac{\partial w}{\partial t} d\Gamma + \frac{1}{Re} \int_{\Gamma_h} \omega_3 \frac{\partial u}{\partial z} d\Gamma \quad (13)$$

$$\int_{\Gamma_h} \omega S d\Gamma = - \frac{1}{Re Pr U_c} \int_{\Gamma_h} \omega \frac{\partial \Theta}{\partial t} d\Gamma \quad (14)$$

3. 3次元平行平板間熱対流問題

(1) 解析領域と条件

流体は非圧縮粘性流体とし、図-1に解析領域、境界条件を、表-1に計算条件を示す。解析条件は、領域分割数

KeyWords: 安定化有限要素法, エネルギー方程式, 流出境界条件処理法

連絡先: 〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27 TEL 03-3817-1808 FAX 03-3817-1815

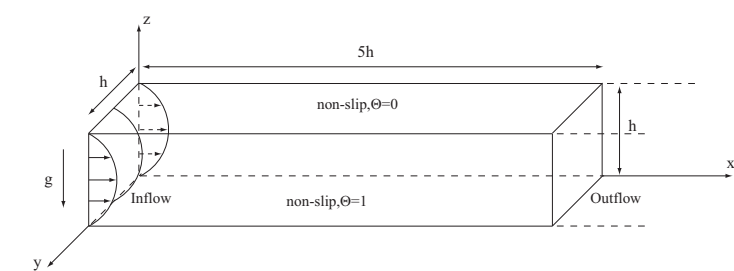


図-1 解析領域，境界条件

Re	Pr	Gr	Δt	最小メッシュ幅	U_c
10	0.667	1.5×10^4	1.0×10^{-2}	0.05	$\frac{2}{3}$

表-1 計算条件

	運動方程式	エネルギー方程式
Case1	Traction-free 条件	断熱条件
Case2	Traction-free 条件	F.O.B.C.+S.R.C.
Case3	F.O.B.C.+S.R.C.	断熱条件
Case4	F.O.B.C.+S.R.C.	F.O.B.C.+S.R.C.

表-2 流出境界条件処理ケース

を x 方向, y 方向, z 方向それぞれ, 40 分割 $\times$ 10 分割 $\times$ 20 分割, 総節点数 9,471, 総要素数 48,000, y 方向側面に周期境界条件を与える. 初期条件は流速・圧力に関して全領域で 0, 温度に関しては下壁面 ($\Theta = 1$) を除き $\Theta = 0$ とした. 流入流速は $u = 4z(1 - z)$, $v = w = 0.0$ で与え, 流入壁面温度は $\Theta = 1.0 - z$, 流出境界上での伝播速度 U_c は流入流速の断面平均値を用いた. 流出境界条件処理の比較を行い, それぞれのケースを表-2 に示す. 参照解はメッシュ分割幅を変えずに, x 方向長さを $7.5h$ としたものをを用いた結果であり, それぞれのケースと同じ座標節点での値と比較する. なお, 表-2 にある Traction-free 条件とは, 式 (5) の h_i を 0, 断熱条件は式 (7) の S を 0 とする条件である. また, F.O.B.C.+S.R.C. とは節 2.2 の中山らによる流出境界条件処理法のことを指す.

(2) 解析結果

図-2 に計算結果の一例として, Case1, 4 における流出境界条件処理法と参照解との $t = 5.0$ での温度分布の比較を示す. また図-3, 図-4 にそれぞれのケースでの流出境界節点 (5.0h, 0.5h, 0.5h) 上の温度, z 方向流速の時間履歴を示す. Case1, 2 の場合, 図に示すように温度, z 方向流速ともに不自然な値を示して. 一方, Case3, 4 の場合, 参照解と概ね良好な一致を示し, 特に Case4 においては初期において若干のずれはあるものの, 温度と z 方向流速において参照解に非常に近い結果を得ることができた. また伝播速度の与え方についても比較し, 流入流速の平均値, 流出流速の平均値を用いたものが最も参照解と一致した.

4. おわりに

本報告では安定化有限要素法に基づく解析に流出境界条件処理法導入し, それらの比較検討を行った. その結果, 以下の結論を得た.

- F.O.B.C に S.R.C を組み込んだ流出境界条件処理法

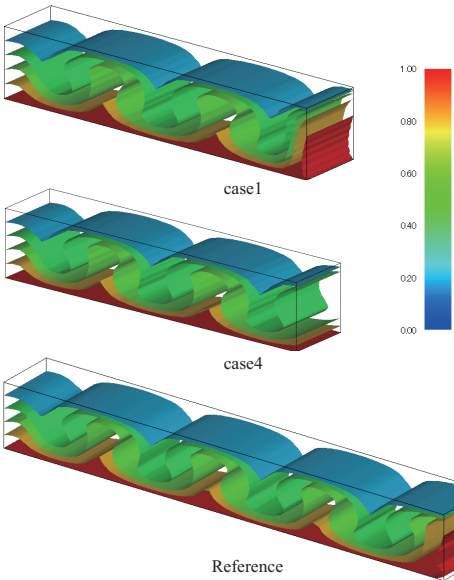


図-2 等温線図

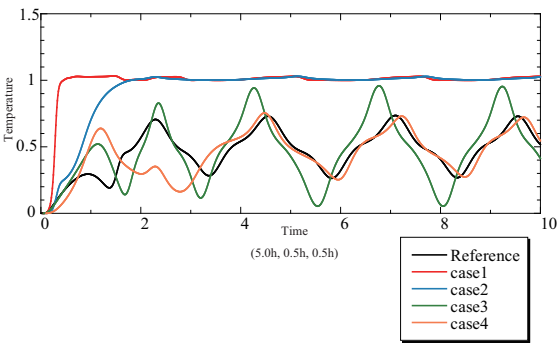


図-3 温度の時間履歴

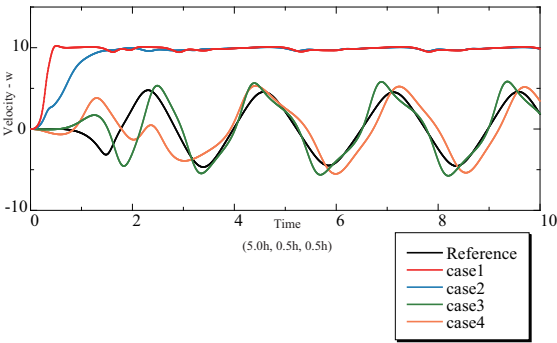


図-4 z 方向流速の時間履歴

を運動方程式, エネルギー方程式の両方に用いることで, 合理的な流れの流出を実現である.

- 本解析においては伝播速度に流入境界流速の平均値, および流出境界流速の平均値を与えるのが参照解と最も良い一致を示した.

今後の課題として, 乱流モデルの導入, 実地形での解析などがあげられる.

参考文献

1) 中山司, 岩崎潤: 熱移動を伴う管内粘性流の有限要素法解析における流出境界条件に関する検討, 日本機械学会論文集 (B 編), 58 巻 554 号 (1992-10), pp.43-48
2) T.E.Tezduyar: Stabilized finite element formulations for incompressible flow computations, Advance in Applied Mechanics, 28, pp.1-44, 1992.