拡張有限要素法と有限被覆法による不連続変形解析に関する研究

茨城大学　学生会員　○ Tran Anh Quang
茨城大学　正会員　車谷　麻緒

1. はじめに

連続体中にクラックなどの不連続面が発生する問題は計算力学の分野において大きな課題の一つとして残されている．近年，PU (Partition of Unity) 法を応用した新しい有限要素法 (FEM: Finite Element Method) が注目を集めている．この種の解析手法は解析対象物とは独立に解析メッシュを構成することができるため，メッシュフリー的な解析が可能であり，コンクリートのひび割れや鋼材の疲労き裂の解析への応用が期待されている．したがって実用化に向けて，各種解析手法が有する特徴を整理する必要がある．

本研究では拡張有限要素法[1](X-FEM: eXtended Finite Element Method) と有限被覆法[2](FCM: Finite Cover Method) を例にクラックの近似特性を検討する．

2. 不連続変形の表現方法

本研究では，X-FEM も FCM もクラック先端の応力の近似を考慮しない．

2.1 X-FEM による不連続変形の表現方法

X-FEM は，FEM の変位の式にエンリッチ関数 (enrichment function) を付加させることによって，連続体中のクラックを有限要素メッシュと独立に表現することができる．

例えば，2 次元 3 節点定ひずみ要素では，変位の不連続性を表すエンリッチ関数を加えて，要素内の位置$\boldsymbol{x}$における変位$\boldsymbol{u}$は次式のように近似できる[1]．

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{3} N_i(\boldsymbol{x}) \left(\boldsymbol{u}_i + \sum_{i \in J} H(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{b}_i \right) \quad (1)$$

ここで，N_iは通常のFEMの形状関数，Jはクラック周辺の変位の不連続性を考慮する節点の集合，$\boldsymbol{u}_i$，$\boldsymbol{b}_i$は節点の自由度ベクトルである．**図-1** には，集合Jに属する節点はJと記してある．何も記していない節点は通常の自由度を有する節点である．$H(\boldsymbol{x})$はクラック近傍での変位の不連続を表すエンリッチ関数である．ここで，Ω_+，Ω_- は **図-1** に示すようにそれぞれクラック線の上側，下側領域である．

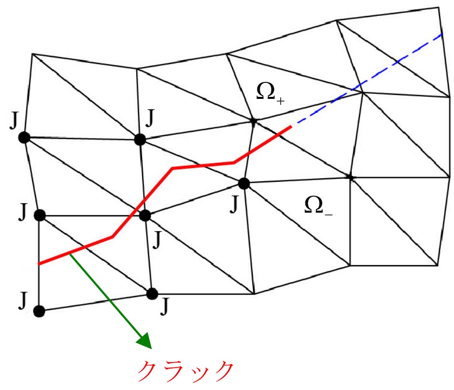

図-1　クラックのモデル化

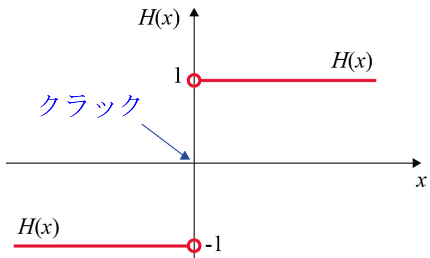

図-2　エンリッチ関数

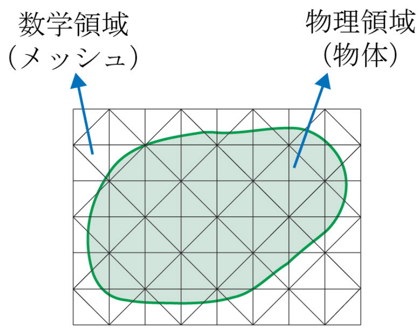

図-3　FCM の定義

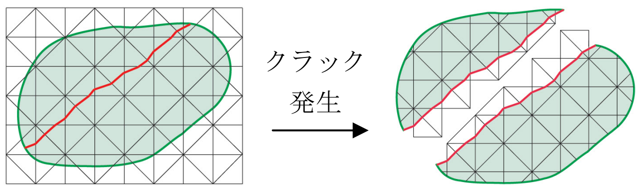

図-4　有限被覆近似

キーワード：　X-FEM, FCM，不連続変形の解析
連絡先：〒316-8511　茨城県日立市中成沢町　4-12-1　茨城大学　TEL 0294-38-5004

$$H(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1 & \boldsymbol{x} \in \Omega_{+} \\ -1 & \boldsymbol{x} \in \Omega_{-} \end{cases} \qquad (2)$$

2.2 FCMによる不連続変形の表現方法

FEMでは，解析対象を要素という部分領域に分割し各々にたいして節点値による補間近似を導入する．そして，要素ごとに得られた剛性方程式を，要素の結合情報から再び全体系への連立代数方程式に組み立てなおすという方法論をとる．これに対し，FCMでは，解析対象と支配方程式の分割と再構築という点ではFEMと同様であるが，「近似関数が定義される数学的な部分領域（数学被覆）」と「支配方程式を満たされるべき物理的な部分領域（物理被覆）」を分離して考えるという点でFEMとは大きく異なる(**図-3** 参照)[2].

図-4 には，2次元問題における被覆の具体的な定義を模式的に示している. FCMでは, クラックに沿って, 二重被覆（要素）を定義することにより，不連続変形を表すことができる．要素内の位置 $\boldsymbol{x}$ における変位 $\boldsymbol{u}$ は次式のように近似することができる．

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{3} N_i(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}_i \qquad (3)$$

ここで，N_iは通常のFEMの形状関数，$\boldsymbol{u}_i$ は節点の自由度ベクトルであり，この式はFEMの変位の式と同じである．

3. 数値解析例

3.1 解析モデル

図-5 のようなモデルを考える．ヤング率とポアソン比と要素の厚さはそれぞれ 20000 MPa，0.2，1 mm とし，平面応力状態で解析する．

3.2 解析結果と考察

図-6 に解析結果を示す. X-FEM と FCM で解析すると，同じ結果となった．

X-FEMでは，節点の変位を求めるために，連立方程式から求めた節点の自由度$\boldsymbol{u}_i$，$\boldsymbol{b}_i$ を式 (1) に代入する必要がある．一方，FCMでは連立方程式の解は節点の変位である．

二つの方法の比較は**表-1** に示す. FCM では二重被覆を用いたため，全節点数について比較すると，FCM の方が多い．FCM で追加した節点の自由度は X-FEM での J 節点の自由度と同じなので，二つの方法の全自由度は等しい．**図-7** より，X-FEM における B マトリクスのサイズは要素によって変わる．一方，FCM では，エンリッチ関数がないため，FCM における B マトリクスは FEM と同じである．そのため，クラックを解析する際に，X-FEM は FCM より計算量が多くなってしまうという欠点がある．

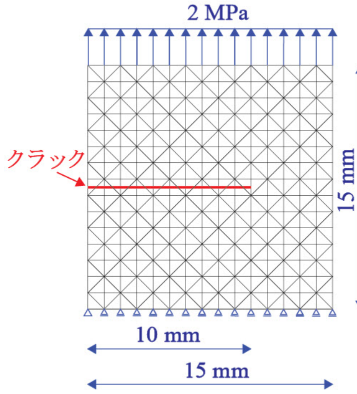

図-5　解析モデル

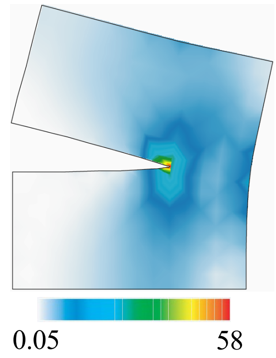

図-6 von-Mises 応力(MPa)

表-1　二つの方法の比較

	X-FEM	FCM
全節点数	256	276
全自由度	535	535
B マトリクスの種類数	7	1

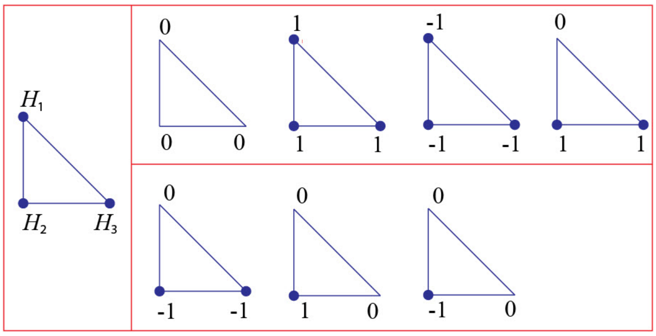

図-7 X-FEM における要素節点のヘビサイド関数の値

4. 結論

以上より，X-FEM と FCM を用いてクラックを解析するときには，次のようなことが言える．

- X-FEM と FCM を用いれば，リメッシュしなくても不連続変形を近似することができる．
- X-FEM は FCM より計算が複雑なため, FCM の方がクラック解析への実装が容易である．

5. 参考文献

1) Moës, N., Dolbow, J., Belytschko, T. : A finite element method for crack growth without remeshing, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.46, pp.131-150, 1999.

2) 車谷麻緒，寺田 賢二郎：有限被覆法における一般化要素の近似性能に関する基礎的研究，日本計算工学会論文集，論文番号 20030027, 2003.