CIP 法による音場解析

中央大学　学生員　○ 守屋　陽平
中央大学　正会員　　樫山　和男
清水建設　　　　　　谷川　将規

1.　はじめに

近年, コンピュータのハードウェアの進歩により境界要素法や FDTD 法，CIP 法[1] 等による波動音響理論に基づく高精度な音場解析手法が提案されている．

そこで本論文では波動音響理論に基づく高精度な音場解析を行うために，実用性の面から計算精度と計算時間の双方で優位性をもつ CIP 法に着目し，CIP 法による音場解析を 3 次元伝搬問題に適用し，精度検証を行う．

2.　支配方程式と CIP 法の定式化

(1)　支配方程式と特性曲線法

空気中の波動伝搬は運動方程式 (1), と連続式 (2) で表され，1 次元の場合は以下のようになる[3]．

$$\rho\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial p}{\partial x}=0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t}+\rho c^2\frac{\partial u}{\partial x}=0 \tag{2}$$

ここで，p は音圧 [Pa]，u は粒子速度 [m/s]，ρ は空気の密度 [kg/m^2] である．式 (1) に音速 c[m/s] を掛け，式 (2) との和と差を作ると

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho cu+p)+c\frac{\partial}{\partial x}(\rho cu+p)=0 \tag{3}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho cu-p)-c\frac{\partial}{\partial x}(\rho cu-p)=0 \tag{4}$$

のようになる．

一般に $\partial_t f+c\partial_x f=0$ の形の方程式を移流方程式と呼び (微分演算子$\partial_x=\partial/\partial x$)，一般解は一般の関数 f を用いて $f(x-ct)$ で表わされるため，特性曲線 $x-ct=k$ 上で常に $f(k)$ となる．ここで

$$f_x^+=\rho cu+p \tag{5}$$

$$f_x^-=\rho cu-p \tag{6}$$

とおくと，式 (3) と (4) は以下のようになる．

$$\frac{\partial}{\partial t}f_x^+ +c\frac{\partial}{\partial x}f_x^+=0 \tag{7}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}f_x^- -c\frac{\partial}{\partial x}f_x^-=0 \tag{8}$$

式 (7) は f_x^+が正方向に, 式 (8) は f_x^-が負方向にそれぞれ速さ c で伝搬する移流方程式であり，f_x^+，f_x^-を特性曲線に沿って移流させることで次ステップの値が求まる．この際 2.3 の CIP 補間により移流元の値を求める．p と u は 式 (5) と (6) によって以下のように求めることができる．

$$p=\frac{1}{2}(f_x^+ + f_x^-) \tag{9}$$

$$u=\frac{1}{2\rho c}(f_x^+ - f_x^-) \tag{10}$$

(2)　CIP 補間

CIP 法は特性曲線に沿って物理量を移流させる移流方程式の高精度の解法であり，移流させる物理量を求める際には微分値も用いた CIP 補間と呼ばれる補間を行う．格子点での物理量と微分値から 3 次多項式を用いて滑らかに内挿することで，厳密解のプロファイルを比較的よく維持できる．式 (7)，(8) の両辺を x で微分した式 (11)，(12) も移流方程式を満たす[3]．

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x}f_x^+ +c\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}f_x^+=0 \tag{11}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x}f_x^- -c\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}f_x^-=0 \tag{12}$$

3 次多項式の未知数決定には，格子点における f_x^+, f_x^- に加え, $\partial_x f_x^+, \partial_x f_x^-$ を用いる．

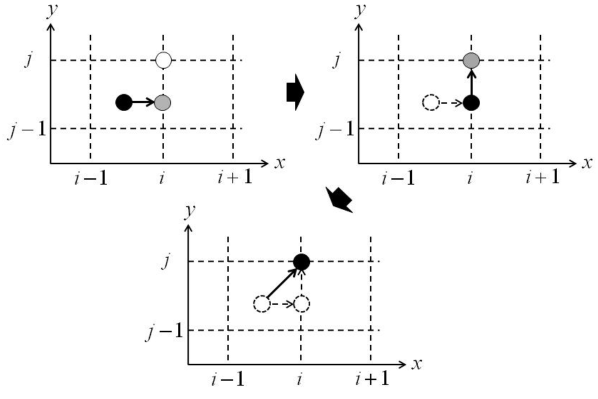
(3)　多次元への応用

多次元問題は 1 次元 CIP 法をそれぞれの方向に拡張する．2 次元の場合は式 (7)，(8) に加え，y 方向の移流方程式 (13)，(14) を解くことにより求める[2]．

$$\frac{\partial}{\partial t}f_y^+ +c\frac{\partial}{\partial y}f_y^+=0 \tag{13}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}f_y^- -c\frac{\partial}{\partial y}f_y^-=0 \tag{14}$$

ここで，v は y 方向の粒子速度，$f_y^+=\rho cv+p$，$f_y^-=\rho cv-p$ である．**図-1** に示すように，斜め方向へは式 (7)，(8) により x 方向へ (図中左上)，式 (13)，(14) により y 方向へ (図中右上) と方向分離を行い移流させる．



図－1　方向分離

KeyWords：　CIP 法，音響，伝搬
連絡先：　〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27　E-mail: d37217@educ.kc.chuo-u.ac.jp

この際，微分値においては CIP 法ではなく 1 次風上差分法を適用する省メモリー型の M 型 CIP 法[1) が一般的によく用いられているが，本論文では青木らによって考案された M 型 CIP 法の高精度スキームである C 型 CIP 法[4) を採用する．この手法は微分値においても CIP 法を適用するため，高精度に多次元問題を解くことができる．すなわち，2 次元の場合は $f.f_x, f_y, f_{xy}$ の計 4 個の独立変数を用い，3 次元の場合は $f, f_x, f_y, f_z, f_{xy}, f_{xz}, f_{yz}, f_{xyz}$ の計 8 個の独立変数を用いることにより，微分値においてもCIP 補間を適用し，移流させることによって多次元化を実現する．

3. 数値解析例

精度検証のための数値解析例として，文献 [5] で扱われている 3 次元伝搬問題を取り上げる．

(1) 解析条件

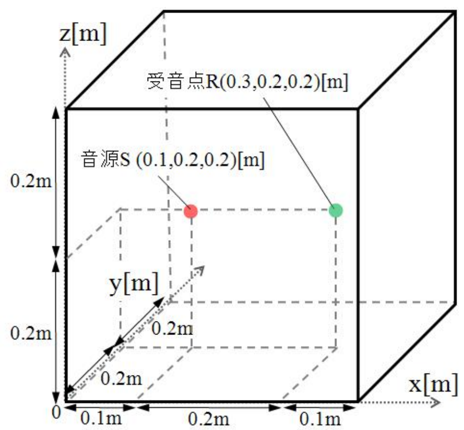
解析領域は**図-2** に示すものであり，空間離散化幅を 4mm，時間離散化幅を 0.0026ms(CFL=0.45)，音源 S を (0.1,0.2,0.2)m，受音点 R を (0.3,0.2,0.2)m に設定する．

$$p(r) = exp\left\{-\left(\frac{r}{d}\right)^2\right\} \tag{15}$$

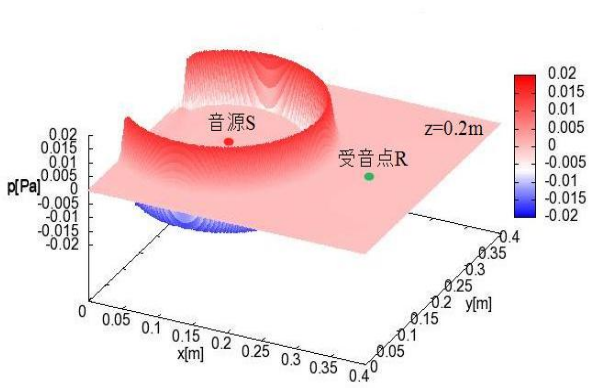
初期の音圧分布は式 (15) の Gauss 分布とし，r は波源点からの距離を表し，d は音源の幅を与える定数であり 0.01m とする．これは格子間隔に比べて音圧分布の変化が急峻であり，高い周波数成分まで含んだ波源である．また，媒質密度 ρ は 1.21kg/m^2，音速 c は 342.57m/s とし，境界からの反射波が受音点に影響しない 0.78ms まで計算を行う．

(2) 解析結果

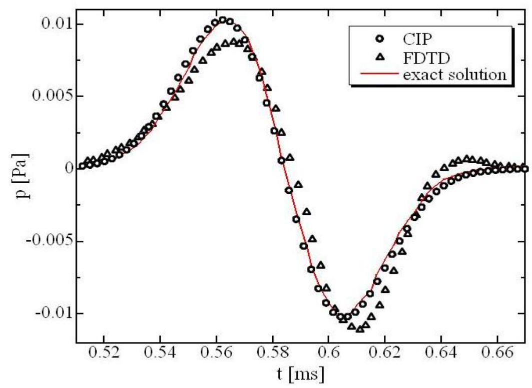
図-3 に z=0.2m の面における音圧の様子 (t=0.36ms) を，**図-4** に FDTD 法 (文献 [5] 参照) と解析結果を示す．FDTD 法は厳密解との差と波形の崩れがみられるが，CIP 法の解析結果は厳密解とおおむね良い一致を示しており，既往研究とほぼ同様の結果である．これより，CIP 法は FDTD 法に比べて高周波成分での計算能力が高く，厳密解との比較からも計算精度が高いことがわかる．



図－2 解析領域



図－3 CIP 法による 3 次元音場解析の様子 (t=0.36ms)



図－4 FDTD 法と解析結果の比較

4. おわりに

本論文では，CIP 法による音場解析手法の構築を目的とし，3 次元伝搬問題において精度検証を行い，以下の結論を得た．

- 3 次元伝搬問題において，厳密解とほぼ同様の結果が得られ，高精度に音場解析が行えることが確認できた．
- 高周波成分を含む急峻な波形に対して，FDTD 法と比べて計算能力が高いことが確認できた．

今後の課題として，実地形を想定した境界条件の処理等を検討していく予定である．

参考文献

1) 矢部孝，内海隆行，尾形陽一：CIP 法―原子から宇宙までを解くマルチスケール解法―，森北出版，2007.
2) 矢部孝，尾形陽一，滝沢研二：CIP 法と Java による CG シミュレーション，森北出版，2007.
3) 太刀岡勇気，安田洋介，佐久間哲哉：CIP 法による時間領域音場解析―FDTD 法との比較―，日本音響学会建築音響研究会講演論文集 (秋)，pp. 979-982，2007. 9.
4) T. Aoki, Multi-dimensional advection of CIP (cubic-interpolate propagation) scheme. CFD J. 4 (1995), p. 279-291
5) 斉藤 亮平，西方 敦博：CIP 法と FDTD 法による球面音波伝搬解析の性能，電子情報通信学会論文誌，Vol.J89-A，No.6，pp.576-580，2006，6.