

縮流部を有する開水路流れにおける Undular Bore の水理学的特性

中央大学大学院 学生員 Maritess Quimpo
中央大学大学院 学生員 山下 千智

中央大学大学院 学生員 ○香月 亜記範
中央大学大学院 正会員 本永 良樹
中央大学理工学部 正会員 山田 正

1. はじめに

跳水とは、エネルギーロスを伴う急激な水深増加を発生させる基礎的な水理現象である。著者らは、跳水を題材に古典水理学の発展を目的に本研究を行う。一方で、計算機を用いた等流・不等流計算の持つ問題点として、跳水による水深増加を再現できないこと、フルード数が1を満たすと解が発散することが知られているが、本研究はそれら諸問題の解決への応用が期待できる。著者らは、縮流部上流に見られる水面形について、上流のフルード数と河幅縮小率により4つに分類されることを理論的に導出し、実験により検証した¹⁾。本論文では、上流のフルード数が1以下の時に見られた、緩やかな水深増加と波の伝播を伴う跳水を Undular Bore と定義し、その波高と波長について理論的に考察し、実験により検証を行った。

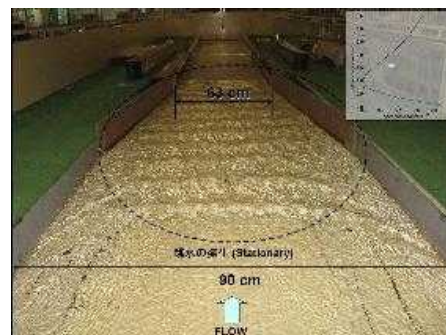


写真 縮流部開水路に発生した跳水
($Fr_0=1.5$, $\varepsilon=0.31$, $Q=15L/s$, $i=1/176$)

2. 縮流部を有する開水路流れにおける水面形の理論的解析と実験による検証

2-1. 縮流部における水深の解析解の存在条件と跳水の発生

本理論の対象とする縮流部を有する開水路流れの概要及び記号を図-1に示す。 B_2 は川幅、 ζ 、 v_2 はその点での水面変位及び平均流速、 h_1 、 v_1 はそれぞれ上流一様水深部での水深及び平均流速である。流れの基礎式は、(1)式に示す連続式と、(2)式に示す Bernoulli の定理式である。(1)式及び(2)式を連立し流速 v_2 を消去し整理すると、無次元化した断面2における水深 y に関する3次方程式(3)式を得る。ここに、 Fr_1 は上流のフルード数であり、また $\varepsilon=(B_1-B_2)/B_1$ を河幅縮小率と定義する。(3)式に対して3次方程式の判別式、カルダノの解法、 $Fr_2=1$ の条件を用いた水理学的解法の3つの方法により(4)式が得られる。無次元化した水深が実数解を得る条件では、水面形が連続的に変化

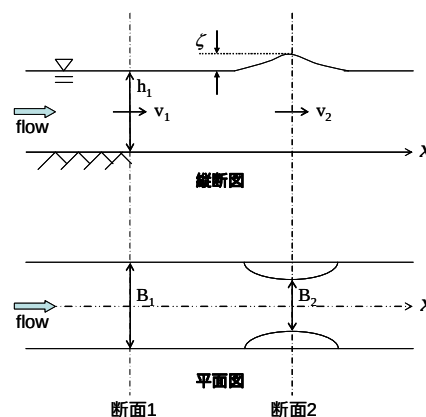


図-1 縮流部を有する開水路の模式図

化する不等流が形成されていると考え。また、無次元化した水深の解が虚数解を含む条件では、水面形の連続性が失われる何らかのエネルギーロスが発生していると考え、その際に跳水が起きていると考える。

2-2. 縮流部前面において段波の遡上する開水路における水面形の理論的解析

本理論の対象とする縮流部前面に段波が発生している開水路流れの概要と

・連続式

$$v_1 h_1 = v_2 (h_1 + \zeta) B_2 \quad (1)$$

・ベルヌーイの定理

$$\frac{1}{2g} v_1^2 = \frac{1}{2g} v_2^2 + \zeta \quad (2)$$

・(1)、(2)式を連立して得られる式

$$y^3 - y^2 \left\{ 1 + \frac{1}{2} Fr_1^2 \right\} + \frac{1}{2} Fr_1^2 \frac{1}{(1-\varepsilon)^2} = 0 \quad (3)$$

$$\left[Fr_1 = \frac{v_1}{\sqrt{gh_1}}, y = \frac{(h_1 + \zeta)}{h_1}, \varepsilon = \frac{(B_1 - B_2)}{B_1} \right]$$

・水理学的条件を用いた導出
・グラフを用いた導出
・Cardanoの解法を用いた導出
いずれの解法でも以下の式を得られる。

$$\varepsilon = 1 - \frac{Fr_1}{\left\{ \frac{2}{3} (1 + Fr_1^2) \right\}^{3/2}} \quad (4)$$

・3つの実数解を持つ条件式

$$R = \frac{1}{4} b_1^2 + \frac{1}{27} a_1^3 < 0 \quad (5)$$

$$\left[a_1 = -\frac{1}{3}, b_1 = \frac{2}{27} + \frac{1}{2} Fr_1^2 \frac{1}{(1-\varepsilon)^2} \right]$$

記号は図-2に示す．断面1及び断面2の間で跳水が発生しており，断面cでは限界水深となっている．流れの基礎式は，(6)式で与えた段波の波速から見た連続式，(7)式で与えた連続式及び(8)式で与えたBernoulliの定理式である．(6)式，(7)式及び(8)式を連立し，発生した段波が消える $c=0$ の条件の下で若干の計算の後，(9)式に示す段波が消える条件の方程式を得る．

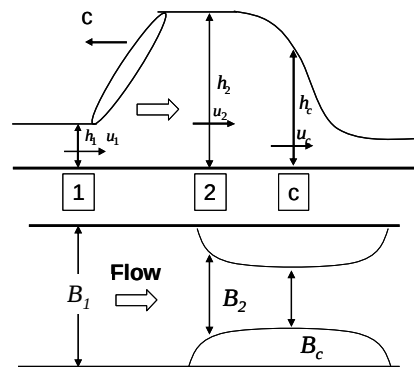


図-2 段波の生じた縮流部を有する開水路の模式図

・連続式

$$1-2: (u_1 + c)h_1 = (u_2 + c)h_2 \quad (6)$$

$$2-c: B_2 h_2 u_2 = B_c h_c u_c \quad (7)$$

・Bernoulliの定理

$$\frac{u_2^2}{2g} + h_2 = \frac{u_c^2}{2g} + d_c \quad (8)$$

$$\varepsilon = 1 - \sqrt{\frac{\frac{1}{2} Fr_1^2 \cdot y_2^2}{y_2^3 - y_2^2 Fr_1^2 + \frac{1}{2} Fr_1^2}} \quad (9)$$

$$\left(y_2 = \frac{\sqrt{1 + 8 Fr_1^2} - 1}{2} \right)$$

実験に使用した水路平面図を図-3に示す．水路床材料が鋼材の固定床の開水路を用い，下流の水路幅を狭めて十分に長い板上上流と下流を繋げて縮流部を有する水路を作成した．実験方法は，上流端より流量を一定で与え，その時に水路幅が狭まりきる断面より上流側において跳水発生の有無を観察し，上下流の影響の及ばない地点における河道中央において水深，流速を計測し上流のフルード数を算出した．流速は電磁流速計，水深はポイントゲージを用いて計測した．上流の流れが射流の実験では，水路幅が狭まりきる断面より 7.5m 上流に測定地点を設定し，上流端流量を 15L/s で与え，水路床勾配を最大 1/60 から最小 1/200 まで徐々に緩め上流のフルード数を下げ，水面形の観察を行った．また，上流の流れが常流の実験では，測定地点を水路幅が狭まりきる断面より 4m 上流に設定し，上流端流量を 7L/s で与え，水路勾配を 0 から最大 1/230 まで徐々に勾配を大きくし上流のフルード数を上げ，同様の実験を行った．実験結果を図-4に示す．横軸は河幅縮小率，縦軸は上流のフルード数である．実験結果と理論を比較すると，常流部・射流部ともに実験において跳水が発生した点と，理論的に導かれた解析解に虚数を含む領域はよく一致している．本実験では，

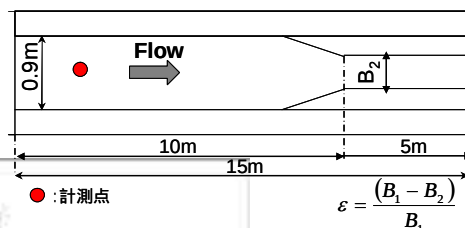


図-3 実験水路諸元

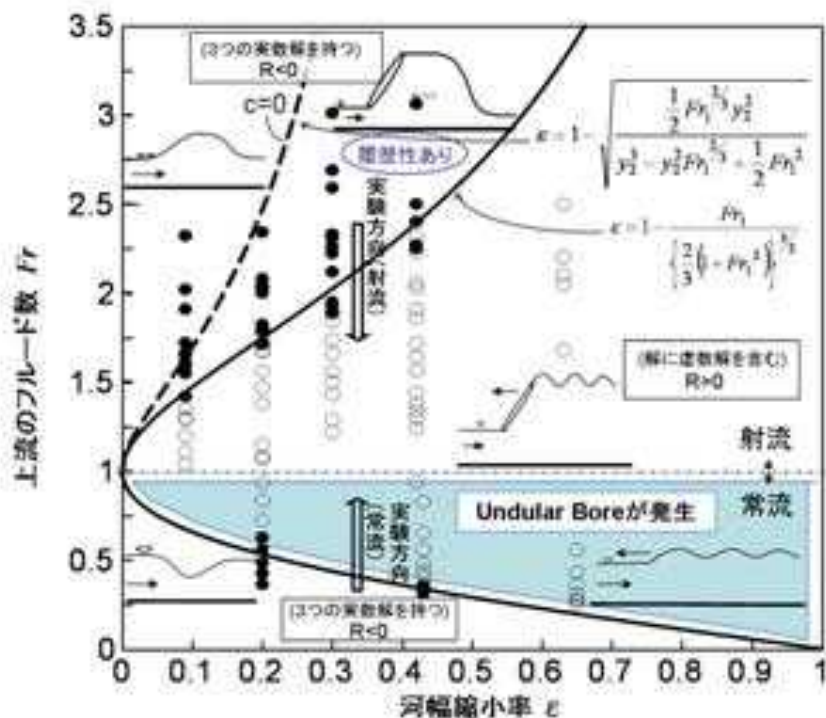


図-4 縮流部開水路における水面形

跳水の無い理論上水深が実数解を持つ流れから、跳水が発生する理論上解に虚数解を含む流れに向かって実験を行ったが、理論的には跳水が発生している流れから上流のフルード数を上げると図-4の破線を境に跳水が消滅すると考えられる。

3. Undular Bore の波高及び波長の理論的解析と実験による検証

3-1. Undular Bore の波高及び波長の理論的解析

跳水始端のフルード数が 1-1.7 の流れで跳水が起こる場合、横断方向に軸を持つ渦や砕波を伴わない水深増加の緩やかな跳水 (=Undular Bore) が発生する。著者らは、過去の研究で上流のフルード数が 1 を下回り、かつ水深の解析解に虚数解が含まれる流れにおいて同様の流況が見られることを確認している¹⁾。そこで著者らは、Undular Bore が微小振幅波の仮定を満たすとし、その水面形を解析的に考察した。本理論の対象とする Undular Bore の概要と記号を図-5 に示す。 h, u, c, a, H, L はそれぞれ水深、流速、波速、振幅、波高、波長を示し、また添字は対象とする断面を表している。本理論では u_0 をゼロと仮定し、 u_1 を上流に遡上する方向に設定している。流れの基礎式は、(11)式で示す段波の絶対速度から見た連続式(10)式である。また、(12)式は分散関係式から導かれる波速の関係式であり、(10)式、(11)式及び(12)式を連立し整理すると(15)式を得る。一方で、連続式と運動量保存則から(16)式に示す段波の波速の関係式を得る。以上の関係式を整理すると、(*)式が得られる。ここに、 β は上流の水深で除して無次元化した段波高である。(*)式について考察すると、jump が起こる前の水深 h_0 を計測すると、共役水深関係から段波の平均水深 h_1 が算出され、未知数は波数 k のみとなり、数値的に解くことにより波数 k の解を得ることができ、波数 k から波長 L を算出できる。次に、同様の流れの振幅について理論的に考察する。(20)式に示す波のエネルギー輸送速度(群速度)の関係式、(21)式に示す波の運動エネルギー及び(25)式に示す段波によるエネルギー損失の式を用いて、波の運動エネルギーの輸送速度と単位時間当たりのエネルギー損失が等しいことを示す(26)式が成立するとし式を整理すると、(**)式が得られる。(**)式は(*)式と同様の方法で振幅 a について解くことができる。

3-2. 実験による検証

導出した理論について実験により検証を行った。実験に用いた水路は 2 章で用いたものと同様である。実験方法は、河幅縮小率を 0.63 に設定し、上流から与える流量、水路床勾配を調整し縮流部上流に Undular Bore を発生させ計測を行った。 h_0 は上下流の影響の無い地点にて河道中央における水深を代表値として計測し、Bore の平均水深 h_1 及び振幅 a は、発生した段波の第一波目の最大値及び最小値から算出した。波長 L は水路

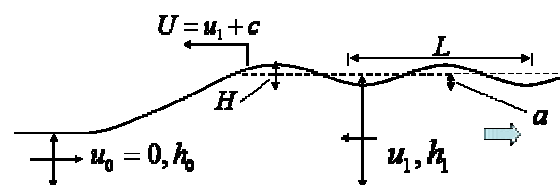


図-5 Undular Bore の模式図

・連続式

$$(0-U)h_0 = (u_1-U)h_1 \quad (10)$$

$$\therefore U = u_1 + \frac{h_0}{h_1} U \quad (10)'$$

・段波の絶対速度

$$U = u_1 + c(k) \quad (11)$$

・波速

$$C(k) = \sqrt{\frac{g}{k} \tanh kh_0} \quad (12)$$

$$\left[k = \frac{2\pi}{L} : \text{波数} \quad (13) \right]$$

(10)', (11), (12):

$$\frac{h_0}{h_1} U = \sqrt{\frac{g}{k_0} \tanh k_0 h_1} \quad (14)$$

$$\frac{U}{\sqrt{gh_0}} = \frac{h_1}{h_0} \sqrt{\frac{1}{k_0 h_0} \tanh k_0 h_1} \quad (15)$$

・段波の波速の基礎式

$$c = -u_1 \pm \sqrt{\frac{g(h_0 + h_1)h_1}{2h_0}} \quad (16)$$

(11), (16):

$$U = \sqrt{gh_1} \sqrt{\frac{1}{2} \frac{h_1 + h_0}{h_0}} \quad (17)$$

$$\frac{U}{\sqrt{gh_0}} = \sqrt{\frac{h_1}{h_0} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{h_1}{h_0}\right)} \quad (18)$$

(15), (18):

$$\sqrt{\frac{1}{2} (1+\beta)(2+\beta)} = (1+\beta) \sqrt{\frac{1}{k_0 h_1} (1+\beta) \tanh k_0 h_1} \quad (19)$$

$$\therefore \frac{1}{2} (2+\beta) = (1+\beta)^2 \frac{1}{k_0 h_1} \tanh k_0 h_1 \quad (*)$$

$$\left[\beta = \frac{h_1 - h_0}{h_0} : \text{無次元段波高} \right]$$

・群速度

$$C_G = \frac{c(k)}{2} \left(1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh} \right) = nc(k) \quad (20)$$

$$n = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh} \right) \quad (21)$$

・Uから見たエネルギー輸送速度

$$U - (u_1 + C_G) = (U - u_1) - C_G \quad (22)$$

(10)', (16):

$$U - (u_1 + C_G) = \left(\frac{h_0}{h_1} U \right) \left(\frac{1}{2} \right) \left(1 - \frac{2kh}{\sinh 2kh} \right) \quad (23)$$

・運動エネルギー

$$E_k = \frac{1}{2} \rho g a^2 \quad (24)$$

・段波によるエネルギー損失

$$\frac{dE_l}{dt} = \frac{\rho U g (h_1 - h_0)^3}{4h_1} \quad (25)$$

脇に設置したメジャーを用いて計測した。実験結果を図-6, 図-7, 図-8, 図-9 に示す。図-6 の縦軸は段波の平均水深で除して無次元化した波長, 横軸は上流の水深で除して無次元化した段波の平均水深である。図-7 の縦軸は図-6 と同様に取り, 横軸は無次元段波高である。図-8 及び図-9 の縦軸は段波の平均水深で除して無次元化した振幅に取り, 横軸は図-6 及び図-7 と同様である。以上の結果について考察を行う。図-6 及び図-7 より波長 L は無次元段波高 β が 0.4 より小さい範囲で理論値とよく一致した。 β が 0.4 より大きい範囲で値が理論値から離れている理由は, 微小振幅波の仮定が満たされていないためと推測される。図-8 及び図-9 より, 振幅 a は理論と同様の傾向を示しているものの, 値としては良い一致が見られなかった。その理由として, 実験における Undular Bore が動的平衡状態にあり, 人的誤差により平均的な値を得ることができなかったと考えられる。

・エネルギー輸送速度の関係式

$$E_k(U - (u_1 + C_G)) = \frac{dE_l}{dt} \quad (26)$$

(23),(24),(25),(26):

$$\left(\frac{a}{h_1}\right)^2 = \frac{\beta^3}{(1+\beta)^2} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{2k_0 h_1}{\sinh 2k_0 h_1}\right)} \quad (**)$$

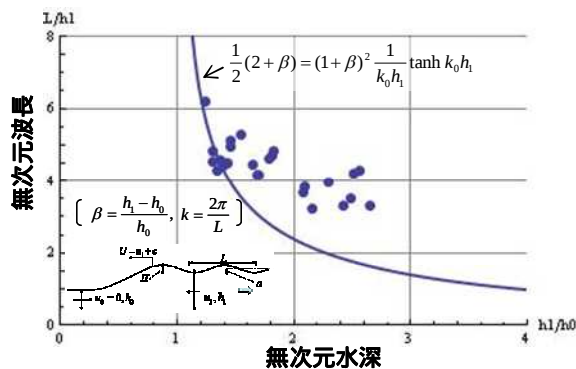


図-6 無次元波長と無次元水深の関係

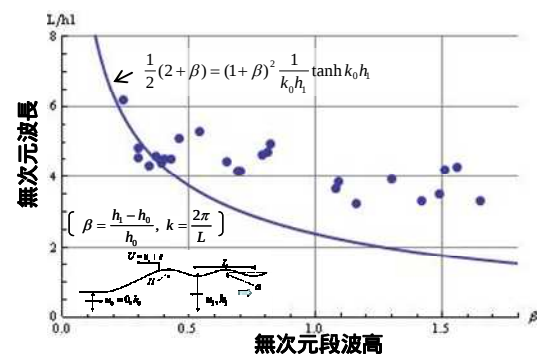


図-7 無次元波長と無次元段波高の関係

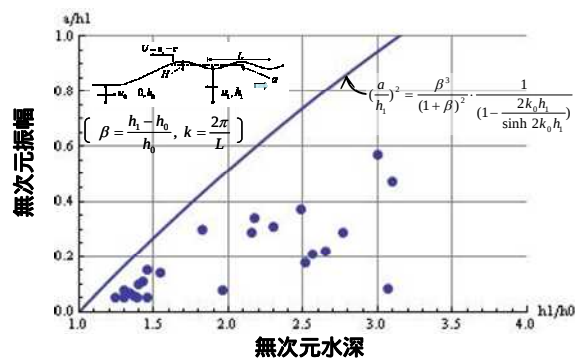


図-8 無次元振幅と無次元水深の関係

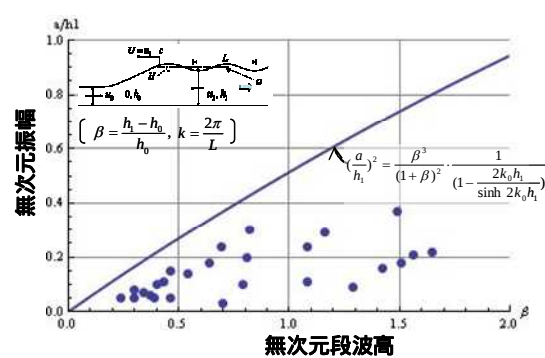


図-9 無次元振幅と無次元段波高の関係

4. まとめ

本研究により得られた知見を以下に示す。

- 1) 縮流部における跳水の発生条件を理論的に解析し, 実験による検証は理論とよく一致した。
- 2) 縮流部開水路に見られる水面形を分類し, 上流のフルード数が射流の時は条件により履歴性があることを示した。
- 3) Undular Bore の波長及び振幅について理論的に解析し, 実験による検証は概ね良い結果を示した。

(参考文献)

- (1) 香月亜記範, 山下千智, Maritess Quimpo, 本永良樹, 山田正: 縮流部を有する開水路実験における跳水現象の基礎的研究, 水文・水資源学会 2009 年度研究発表会要旨集, pp.216-217, 2009
- (2) 高木隆一, 佐藤直良, 山田正: 幅の変化する水路(狭窄, 拡幅)を流れる不等流の水面形の解析解, 第 60 回土木学会関東支部年次研究発表会講演概要集, Vol.13, pp.131-132, 1986