合成合理式の数学的導出

中央大学理工学部　学生員　○笹田　拓也　　　中央大学大学院　　正会員　渡邉　暁人
中央大学大学院　正会員　　渡辺　直樹　　　中央大学大学院　フェロー会員　山田　正

１．はじめに

著者らは物理的な観点から降雨流出機構の解明を行うとともに流域特性や時空間スケールを問わず普遍的に適用可能な降雨流出モデルの構築を目指している．現在広く使われている流出モデルは治水目的の実務の面での要求は満たしているが，概念モデルとして降雨流出過程を未知のものとして扱っているものが多い．代表的な概念流出モデルのひとつとして挙げられる合成合理式の考え方は従来から提案されており実際に中小河川等の治水計画で活用されているものの，これまで明示的な基本式の形では示されてこなかった．本論文は単一斜面の降雨流出を表現する基本式から合理式・合成合理式を導出する．

２．単一斜面における降雨流出の基本式

従来から著者らは直接流出の主成分は斜面表層における早い中間流及び表面流であるとし, 斜面流下方向流れを kinematic wave 法に基づき表現してきた．斜面流下方向流れは様々な流出形態（例えば, Darcy 則，Manning 則，飽和不飽和側方流など）をとるとして，一般化された運動則として(1)式 $v=\alpha h^m$ に示すように水深のべき乗で表現している. 様々な流れの抵抗則をこのべき乗で表現することにより, 低水時から高水時までの全ての流出形態を一般化し表現しようというものである．流れの連続式としては(2)式が成立する．(2)式は一次元領域で蒸発散などによる系外への流出が無い流れ場においては確実に成立する．

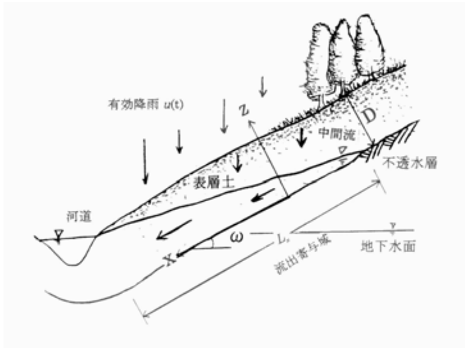

図-1　単一斜面における降雨流出の模式図

$$v=\alpha h^m,\quad q=vh=\alpha h^{m+1} \qquad (1) \qquad\qquad \frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\partial q}{\partial x}=r(t) \qquad (2)$$

ここに v：断面平均流速$[m/h]$，h：湛水深$[m]$，q：単位幅流量$[m^2/h]$，$r(t)$：降雨強度$[m/h]$．α，m は流域特性を表すパラメータである. 降雨強度の単位は [mm/h]で与え単位換算している. (2)式を(3)式のように変形し，(1)式を用いて単位幅流量 q に関する式として整理し直すことで (4)式の kinematic wave 方程式が得られる．

$$\frac{\partial h}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial t}+\frac{\partial q}{\partial x}=r(t) \quad , \quad \frac{\partial q}{\partial h}=\alpha(m+1)h^m, \quad \frac{\partial q}{\partial t}+(m+1)v\frac{\partial q}{\partial x}=(m+1)vr(t) \qquad (3)$$

(1)式，(3)式を用いて単位幅流量 q に関する式に変形すると

$$\frac{\partial q}{\partial t}+(m+1)\alpha^{\frac{1}{m+1}}q^{\frac{m}{m+1}}\frac{\partial q}{\partial x}=(m+1)\alpha^{\frac{1}{m+1}}q^{\frac{m}{m+1}}r(t)$$

よって　$$\frac{\partial q}{\partial t}+aq^{\frac{m}{m+1}}\frac{\partial q}{\partial x}=aq^{\frac{m}{m+1}}r(t) \qquad (4) \qquad ただし\quad a=(m+1)\alpha^{\frac{1}{m+1}} \qquad (5)$$

この(4)式が単位幅流量に関する kinematic wave 方程式となり，降雨流出を表現する基礎式となる．既往の概念的流出モデルは(4)式にそれぞれのモデルに相応しい仮定を導入することで導出されることが呉・山田 [1]によって示されている．本論文ではその考え方に基づき，この基礎式において式（6）で示される条件が成立する流れを対象とすることで合理式及び合成合理式を導く．

$$v=\alpha h^0=\alpha=const. \qquad (6)$$

キーワード　物理過程，流出解析手法，単一斜面，合理式，合成合理式，
連絡先：〒112-8551　東京都文京区春日 1-13-27　中央大学大学院　理工学研究科　Tel03－3817－1805

3．合理式及び合成合理式の明示的な解の導出

$$v = \alpha h^0 = \alpha = const. \qquad (6) \qquad\qquad a = (0+1)\alpha^{\frac{0}{0+1}} = \alpha = v \qquad (7)$$

（6）式が成立するのは斜面流下方向流れにおける断面平均流速vが水深によらず一定の場合，つまりは流れの抵抗則$m=0$の時である．これは飽和ダルシー則や定常状態の流れにおいて成立する．このとき（7）式となり，(4)式を整理することにより（8）式の偏微分方程式が得られる．(8)式の右辺は降雨強度rに断面平均流速vを乗じたものであり，数学的には発生項にあたる．

$$\frac{\partial q}{\partial t} + v\frac{\partial q}{\partial x} = vr(t) \qquad (8)$$

山田 [2)]はこの(8)式に拡散項を加えより厳密な斜面流下方向の浸透流に関する無次元化した運動方程式の解析解を示している．初期条件・境界条件は以下のように与える．(9)式のように単位幅流量の初期条件は零として考える．一般に我々が得る事のできる降雨データはすべて棒グラフ状に表せる時間方向に離散化されたデータ（例えば時間降雨，10 分間降雨）であり，UnitStep 関数の組み合わせで表現される．よって境界条件として与える降雨$r(t)$を(10)式のように UnitStep 関数を組み合わせた形で表し，降雨開始時間 t_n，降雨強度 r_n^{ave}，降雨継続時間 t_r（例えば 1 時間，10 分間）の任意の雨として与える．

$$q(x,0) = 0 \qquad (9)$$

$$r(t) = r_n(t) = r_n^{ave}\{U(t-t_n) - U(t-(t_n+t_r))\} \qquad (10)$$

降雨流出を表現する基礎式である(8)式は，線形ではあるが発生項を伴う移流方程式であり一般的に解くことが難しい．著者らはこれに対し特性曲線法を用いた解法を提案している．本論文では次に示すように特性曲線法を用いる代わりに Laplace 変換を用いてこの方程式の解を導出する．(8)式を Laplace 変換すると(11)式が得られる．ここに$Q(x,s) = L\,[q(x,t)]$，$R(s) = L\,[r(t)]$である．初期条件(9)式より(11)式を書きなおすと(11)式となる． (12)式をQについて解いたのが(13)式である．ここにHはヘヴィサイトのステップ関数と呼ばれ，**図-2** に示すように(15)式の性質を持つ．

$$sQ(x,s) - q(x,0) + v\frac{\partial Q(x,s)}{\partial x} = vR(s) \qquad (11) \qquad\qquad sQ(x,s) + v\frac{\partial Q(x,s)}{\partial x} = vR(s) \qquad (12)$$

$$Q(x,s) = \frac{(1-\exp(-\frac{sx}{v}))vR(s)}{s} \qquad (13) \qquad\qquad H(x) = \begin{cases} 0 & (x<0) \\ 1 & (x>0) \end{cases} \qquad (14)$$

求めたい単位幅流量qは(13)式のQをラプラス逆変換することにより，(15)式のように得られる．

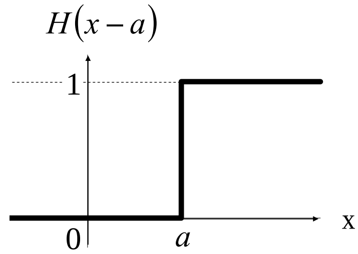

図-2　ヘヴィサイトのステップ関数

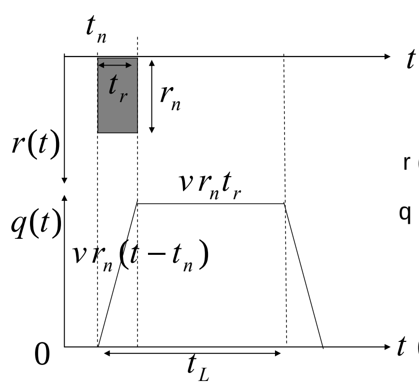

図-3　$t_L > t_r$ の Case

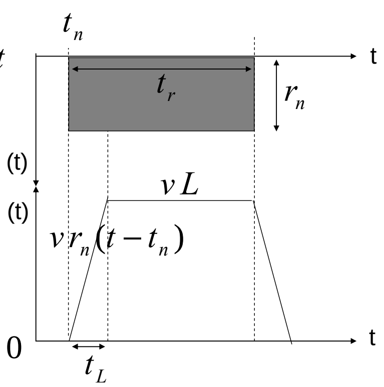

図-4　$t_r > t_L$ の Case

$$q(t)=r_n^{ave}v\left[\begin{array}{l}\left\{(t-t_n)H\left[t-t_n\right]-(t-(t_n+t_r))H\left[t-(t_n+t_r)\right]\right\}-\\ \left\{(t-t_n-\frac{x}{v})H\left[t-t_n-\frac{x}{v}\right]-(t-(t_n+t_r)-\frac{x}{v})H\left[t-(t_n+t_r)-\frac{x}{v}\right]\right\}\end{array}\right] \quad (15)$$

$$Q(t_n+t_L)=L_r\cdot q(t_n+t_L)=L_r\cdot v\,t_L\cdot r^{ave} \quad (16)$$

図-3 及び**図-4** に示すように，この解は洪水到達時間 $t_L=L/v$ と降雨継続時間 t_L の大小関係で二つのケースに分類される．ここに L：斜面長[m]である．斜面末端を考え $x=L$ としている．一般的に用いられる合理式は(15)式のうち洪水到達時間 t_L と降雨継続時間 t_r が等しい場合にあたり，三角形のハイドログラフの頂点の値を求めピーク流量を算出している．この値を式で表したのが(16)式である．ここに Lr：河道長[m]である．$Q=\frac{1}{3.6}frA$ の中の流出率 f は降雨として有効降雨をとった際に内包される．

４．合成合理式の概念とその明示的な解

我々が得ることのできる降雨データは棒グラフ状に表せる時間方向に離散化されたデータであり，(17)式に示すように UnitStep 関数で表現される．前節で条件として用いた(10)式の降雨は(17)式のような降雨データから任意時刻の部分を取り出したものに等しく，(10)式を各々の時刻を考慮して重ねあわせたものが一般的な降雨データであると言える．前節で導いた(15)式の元々の理論は線形解析であるため重ね合わせを行うことができる．任意の降雨データに対するハイドログラフは，降雨データの任意時刻の部分に対する流出を表す(15)式を時刻を考慮して重ねあわせることで表現でき，(18)式のように表現できる．これは合成合理式の手法そのものであり，(18)式は合成合理式を明示的な式の形で表現したものである．

$$r(t)=r_{\max 1}\{U(t-t_1)-U(t-(t_1+\Delta t)\}+\cdots+r_{\max n}\{U(t-t_n)-U(t-(t_n+\Delta t)\}$$

$$r(t)=r_1(t)+r_2(t)+r_3(t)+\cdots+r_{rtime}(t)=\sum_{n=1}^{rtime}r_n(t) \quad (17)$$

$$q(t)=q_{sum}(t)=q_1(t)+q_2+(t)+q_3(t)+.....+q_{rtime}(t)=\sum_{n=1}^{rtime}q_n(t) \quad (18)$$

ただし
$$q_n(t)=r_n^{ave}v\left[\begin{array}{l}\left\{(t-t_n)H\left[t-t_n\right]-(t-(t_n+t_r))H\left[t-(t_n+t_r)\right]\right\}-\\ \left\{(t-t_n-\frac{x}{v})H\left[t-t_n-\frac{x}{v}\right]-(t-(t_n+t_r)-\frac{x}{v})H\left[t-(t_n+t_r)-\frac{x}{v}\right]\right\}\end{array}\right]$$

ここで特筆すべきは(17)式で降雨を実際の降雨の形式である UnitStep 関数で表現しているため，時間間隔を与えさえすれば任意の時系列降雨データをそのまま用いて計算できるということである．また解である(18)式も降雨と同様に UnitStep 関数の組み合わせで表されることが興味深い．(18)式の $q_{sum}(t)$ は降雨 $r(t)$ に対する斜面長 L[m]の斜面からの単位幅流量を表す．

５．合成合理式を用いた計算の一例（降雨をそのまま用いた場合と平均化して与えた場合の比較）

(18)式で示した合成合理式を用いた計算の一例として仮想的な降雨を考え計算を行う．前節で導いた(17)式，(18)式は任意の降雨継続時間 t_r の降雨データに対して計算することができる．毎分の降雨強度 r を乱数に従い 0～20[mm/h]の間で変化させて与えた 1 分間降雨，それを 10 分間平均した 10 分間降雨，1 時間平均した時間降雨を作成した．この同一の降雨で時間解像度の異なる 3 つのケースを想定して計算する．それぞれの降雨に対して流域特性を表すパラメータである断面平均流速 v を v=5[m/h]，10[m/h]，20[m/h]，30[m/h]，40[m/h]，50[m/h]と変化さ

せ，斜面長 L=30m 一定として斜面末端での流出高を求めた．求めた結果を**図-5～図-7** に示す．実降雨を想定し t_r を1分間として乱数を用いて与えた1分間時間降雨は平均化された降雨と比べて値のばらつきが存在しているが，その応答になると平均化された降雨に対する応答に近いハイドログラフを示している(**図-5**)．この計算条件の場合，降雨データは1時間降雨程度のスケールで平均化された降雨データを用いても差し支えないと考えられる．また３つの降雨それぞれの場合で，v が 20[m/h]以上の場合のハイドログラフは v に関わらずほぼ重なり，同じ値をとっている．これは洪水到達時間 t_L が全体の降雨継続時間 t_r よりも小さくなる場合であり，ハイドログラフも合理式の解析解と同じ形状を示している．このような場合，降雨を降り始めから終了まで降雨継続時間内で平均しても解は同じ挙動を示すと考えられる．

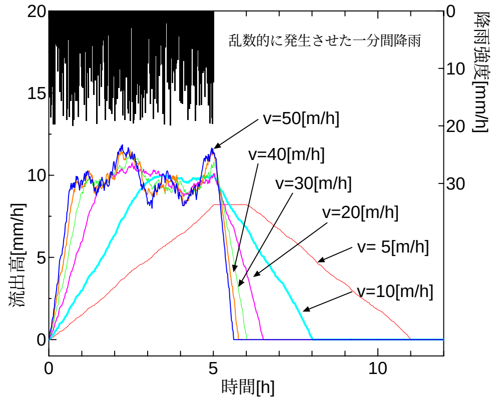

図-5　1 分間降雨を与えた場合

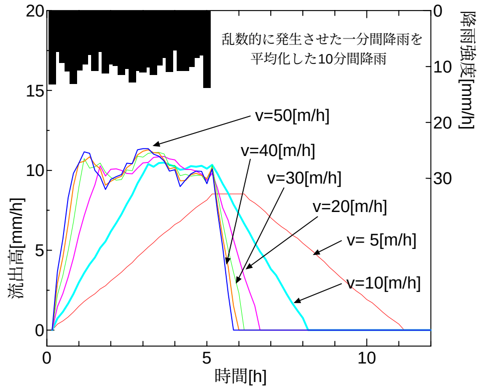

図-6　1 分間降雨を 10 分間降雨に平均化して与えた場合

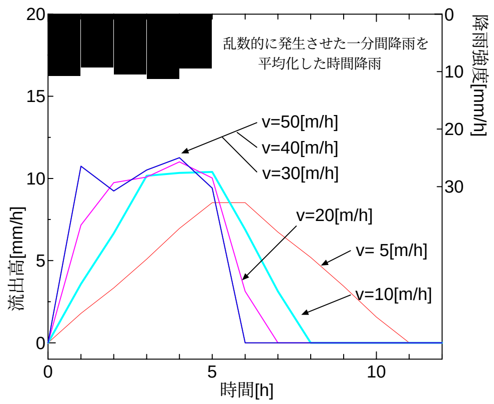

図-7　1 分間降雨を 1 時間降雨に平均化して与えた場合

6．まとめ

本論文は降雨流出過程の解明を目的とし，物理的観点から合理式・合成合理式を導出した．ここで得られた知見を下記に列挙する．

(1) 合理式・合成合理式は，斜面流下方向流れを Kinematic Wave として扱い，斜面流下方向に関する抵抗則として断面平均流速 v が水深によらない飽和ダルシー則をとる場合，もしくは定常状態の場合に導出されることを明らかにした．また Laplace 変換を用いることで合成合理式の解を従来示されてこなかった明示的な式の形で求められることを示した．

(2) 時間方向に離散化されたデータである降雨データを UnitStep 関数の組み合わせで表現することで，一般的な降雨データを容易に本論文で導出された合成合理式に適用できる事を示した．また得られた合理式・合成合理式により表現される降雨流出も同様に UnitStep 関数を組み合わせた形で表されることを示した．

(3) 合成合理式を用いて降雨強度を乱数に従い変化させた仮想的な降雨に対し計算を行った．同一の降雨を 1 分間降雨，10 分間降雨，1 時間降雨として平均化して与えた場合，ばらつきの多い 1 分間降雨に対する解は，時間解像度の粗く平均された 10 分間降雨，1 時間降雨で計算した場合とほぼ同じ解となりばらつきは平均化されることを示した．また流域特性を代表するパラメータである断面平均流速 v の値を変えて計算し，全体の降雨継続時間よりも洪水到達時間が小さくなる v の場合は v の値に関わらず同じ解の挙動となることが示された．

参考文献

1)呉修一，山田正：既往概念流出モデルの理論的導出，水文・水資源学会誌，Vol.22，No.5，2009 年 9 月号
2)山田正，中沢均，吉川秀夫：浸透流に関する水理学的研究，Ⅰ,Ⅱ,Ⅲ，東京工業大学・土木工学科研究報告，No.25,1972.