FEMによる非線形応答解析へのPMLの適用

日本大学大学院理工学研究科 学生会員 ○李 京奉
日本大学大学院理工学研究科 正会員 塩尻 弘雄

1. はじめに

構造物の地震時挙動には、地盤との相互作用が大きな影響を与える。地盤領域の広さは構造物の大きさに比し、格段に大きく、全体を有限要素でモデル化するのは計算量、計算時間が膨大となる。構造物近傍の一部のみモデル化する場合、計算上設定した解析モデルの境界からの反射波の扱いを検討する必要がある。
ここでは地盤が非線形性を有する場合のConvolution-PMLを用いた反射波の処理について検討し、数値例により有効性を示した。

2. 定式化

通常のPML はωが小さい場合に誤差が出る可能性がある。そこで次のように座標変換係数を変え、ωの実軸上の特異点をなくす。

$$\lambda_i = k_i + \frac{\sigma_i}{\alpha_i + i\omega} \quad \cdots(1)$$

ここで、k_i, σ_i, α_iはx_iのみの関数とする。PMLの運動方程式は …（1

$$-\omega^2 \rho \bar{u}_i = \frac{1}{\lambda_j}\frac{\partial \bar{\sigma}_{ij}}{\partial x_j} \quad \cdots(2)$$

また、以下のように歪が書ける。

$$\bar{f}_{ij} = \frac{1}{\lambda_j}\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \quad \cdots(3)$$

$$\bar{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}(\bar{f}_{ij} + \bar{f}_{ji}) \quad \cdots(4)$$

ここで次のような非線形の応力ひずみ関係を考える

$$\bar{\sigma}_{ij} = C_{ijkl}\bar{f}_{kl} + D_{ijpqrsmn}\bar{f}_{pq}\bar{f}_{rs}\bar{f}_{mn} \quad \cdots(5)$$

2次元問題を考え、(2)式の両辺にλ_1, λ_2を乗じる

$$-\omega^2 p \lambda_1 \lambda_2 \bar{u}_i = \lambda_j \frac{\partial \bar{\sigma}_{ij}}{\partial x_j} \quad \cdots(6)$$

式(1)より

$$-\rho\omega^2 (k_1 + \frac{\sigma_1}{\alpha_1 + i\omega})(k_2 + \frac{\sigma_2}{\alpha_2 + i\omega})\bar{u}_i = (k_j + \frac{\sigma_j}{\alpha_j + i\omega})\frac{\partial \bar{\sigma}_{ij}}{\partial x_j} \quad ..(7)$$

書き直せば

$$-\rho\omega^2 \left\{ k_1 k_2 + \frac{k_2\sigma_1(\alpha_2 - \alpha_1) + \sigma_1\sigma_2}{(\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_1 + i\omega)} + \frac{k_1\sigma_2(\alpha_2 - \alpha_1) - \sigma_1\sigma_2}{(\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_2 + i\omega)} \right\} \bar{u}_i = \frac{\partial}{\partial x_j}\left\{ (k_j + \frac{\sigma_j}{\alpha_j + i\omega})\frac{\partial \bar{\sigma}_{ij}}{\partial x_j} \right\} \quad .(8)$$

重み関数w_iを用いて弱定数化を行うと

$$\int_v -\rho\omega^2 w_i \left\{ k_1 k_2 + \frac{k_2\sigma_1(\alpha_2 - \alpha_1) + \sigma_1\sigma_2}{(\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_1 + i\omega)} + \frac{k_1\sigma_2(\alpha_2 - \alpha_1) - \sigma_1\sigma_2}{(\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_2 + i\omega)} \right\} \bar{u}_i dv = \int w_i (k_j + \frac{\sigma_j}{\alpha_j + i\omega})\bar{\sigma}_{ij} n_j ds - \int \frac{\partial w_i}{\partial x_j}(k_j + \frac{\sigma_j}{\alpha_j + i\omega})\bar{\sigma}_{ij} du \quad \cdots(9)$$

フーリエ逆変換により時間領域に変換すると

$$\int_v \rho w_i \left\{ k_1 k_2 \ddot{u}_i + \frac{k_j \sigma_j (\alpha_j - \alpha_j) + \sigma_1\sigma_2}{\alpha_j - \alpha_j} e^{-\alpha_j t} * \ddot{u}_i \right\} dv = \int w_i (k_j \sigma_{ij} + \sigma_j e^{-\alpha_j t} * \sigma_{ij}) n_j ds - \int \frac{\partial w_i}{\partial x_j}(k_j \sigma_{ij} + \sigma_j e^{-\alpha_j t} * \sigma_{ij}) dv \quad \cdots(10)$$

ここで＊は折りたたみ積分を意味する。
同様に式（３）より

$$(k_j f_{ij} + \sigma_j e^{-\alpha_j t} * f_{ij}) = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad \cdots(11)$$

ところで、$e^{-\alpha t} * f(t) = \int_0^t e^{-\alpha(t-t')} f(t')dt' = F(t)$

とおけば$F(t+\Delta t)$は次式のように近似できる

$$\begin{aligned} F(t+\Delta t) &= \int_t^{t+\Delta t} e^{-\alpha(t+\Delta t - t')} f(t')dt' + e^{-\alpha\Delta t}\int_0^t e^{-\alpha(t-t')} f(t')dt' \\ &= \Delta t\{(1-\theta)e^{-\alpha\Delta t} f(t) + \theta f(t+\Delta t)\} + e^{-\alpha\Delta t}F(t) \\ &= \theta\Delta t f(t+\Delta t) + e^{-\alpha\Delta t}F^*(t) \end{aligned} \quad \cdots(12)$$

ここで　$0 \le \theta \le 1, F^*_{(t)} = F(t) + (1-\theta)\Delta t f(t)$である

$$F^*(t+\Delta t) = f(t+\Delta t)\Delta t + e^{-\alpha\Delta t}F^*(t) \quad ....(13)$$

従って式（11）より

$$(k_j+\sigma_j\theta\Delta t) f_{ij}(t+\Delta t) + e^{-\alpha_j\Delta t}\sigma_j F^*_{ij}(t) = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}(t+\Delta t)$$

$$f_{ij}(t+\Delta t) = \frac{1}{k_j+\sigma_j\theta\Delta t}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}(t+\Delta t) - \frac{\sigma_j e^{-\alpha_j\Delta t}}{k_j+\sigma_j\theta\Delta t}F^*_{ij}(t)$$

…（14）

ここで $F^*_{ij}(t)=\int e^{-\alpha_j(t-t')} f_{ij}(t')dt + (1-\theta)\Delta t f_{ij}(t)$

式（10）より

$$\int_v p w_i \{k_1k_2+\theta\Delta t(k_2\sigma_1+k_1\sigma_2)\}\ddot{u}_i(t+\Delta t)dv$$

$$+\int_v pw_i \sum_{i=1}^{2} \left\{\frac{k_j\sigma_j(\alpha_j-\alpha_j)+\sigma_1\sigma_2}{\alpha_j+\alpha_j} e^{-\alpha_j\Delta t}U^*_{ij}(t)\right\}dv$$

$$=\int w_i\left(k_j\sigma_{ij}+\sigma_j e^{-\alpha_j t} * \sigma_{ij} n_j\right)ds$$

$$-\int \frac{\partial w_i}{\partial x_j}\left\{(k_j+\theta\Delta t\sigma_j)\sigma_{ij}(t+\Delta t)+\sigma_j e^{-\alpha_j\Delta t}\sum\nolimits^*_{ij}(t)\right\}dv$$

$$U^*_{ij}(t)=\int_0^t e^{-\alpha_j(t-t')}\ddot{u}_t(t')dt' + \Delta t(1-\theta)\ddot{u}_i(t)$$

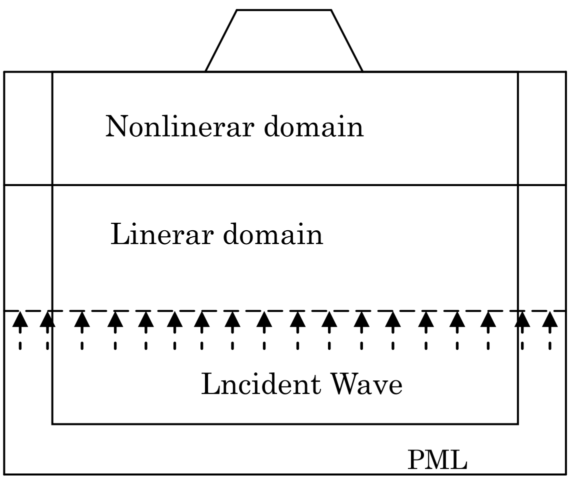
…(15)

$$\sum\nolimits^*_{ij}(t)=\int_0^t e^{-\alpha_j(t-t')}\sigma_{ij}(t')dt'+\Delta t(1-\theta)\sigma_{ij}(t)$$

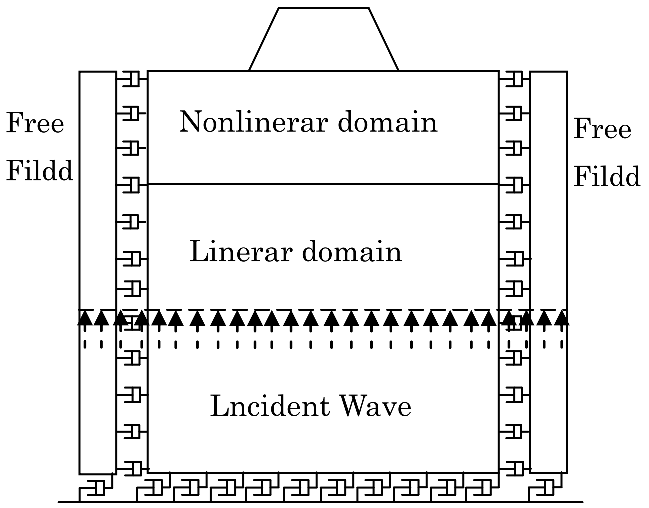
したがって $U^*_{ij}(t+\Delta t)=\Delta t\ddot{u}_i(t+\Delta t)+e^{-\alpha_j\Delta t}U^*_{ij}(t)$

$$\sum\nolimits^*_{ij}(t+\Delta t)=\Delta t\sigma_{ij}(t+\Delta t)+e^{-\alpha_j\Delta t}\sum\nolimits^*_{ij}(t)$$

3. 数値例

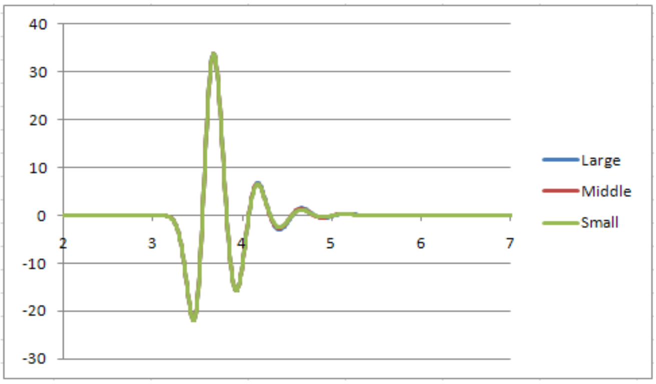


図－1　PML 境界モデル

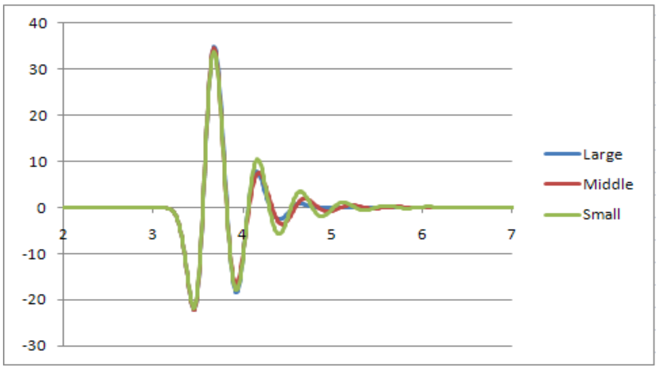


図－2　粘性境界モデル

PML領域の大きさを変えて、卓越周期0.2のリッカーウェイブレットを下部から入射して応答を計算し、その時刻歴を求め、結果を図－３,４に示す。



図－３　PML 境界の時刻歴



図－４　粘性境界の時刻歴

粘性境界に比べ、PMLはモデルの大きさによる差が比較的小さく、PMLの有効性が確認できた。

〔参考文献〕

1)塩尻弘雄、PML によるダム・岩盤・貯水系の計算法についての検討