

Wavelet 基底を用いた時間域境界要素法による 波動伝播解析における計算効率

新潟大学 学生員 菅波祐太
新潟大学 正会員 紅露一寛
新潟大学 正会員 阿部和久

1. はじめに

近年, 境界要素解析の弱点を克服すべく, 高速化・効率化の試みがなされてきており, 高速多重極展開法¹⁾や wavelet 法²⁾が提案されている. Wavelet 法は, 境界値の近似等の離散化に用いる基底として wavelet 基底を用いる方法で, 離散化により得られた係数行列成分の大半は微小な成分となる. 大半の微小な係数成分は解の精度に影響しない範囲内で切り捨て (0 とみなす) ことができ, その結果使用メモリの削減と疎行列用の反復解法を適用することによる計算時間の削減が可能となる.

既往の研究においては, wavelet 法の適用による境界要素解析の効率化は専ら Laplace 問題を対象としており, 非定常問題への適用事例, 特に時間域境界積分方程式の離散化に適用した研究は少なく, 流れ解析の効率化に適用した事例³⁾や線形拡散問題に適用した事例⁴⁾ほどしか見当たらない. また, 波動問題の時間域境界要素法における適用は, 著者ら⁵⁾により示されているが, Haar wavelet の適用に限定されており, 基底関数のゼロモーメント次数の高次化が当該問題においても有効か否かについては検討されていない.

そこで本研究では, wavelet 基底のゼロモーメント次数を解析者により自由に選定可能である非直交スプライン wavelet²⁾を用いた時間域境界要素法を用いて波動伝播解析を行い, wavelet 法の計算効率の向上効果について検討する. 特に, wavelet 基底のゼロモーメント次数の高次化の効果について検討する.

2. 時間域境界要素法における wavelet 法の適用

本研究では, 次の非定常スカラー波動問題を対象とする.

$$\begin{aligned} \Delta u(x, t) - \frac{1}{c^2} \ddot{u}(x, t) &= 0, & (\text{in } \Omega) \\ u &= \bar{u} \text{ (on } \Gamma_u), & p = \frac{\partial u}{\partial n} = \bar{q}, & (\text{on } \Gamma_q) \\ u(x, 0) &= u_0(x), & \dot{u}(x, 0) &= v_0(x), & (\text{in } \Omega) \end{aligned} \quad (1)$$

ここで, u は波動ポテンシャル, c は波動の伝播速度であり, Δ は Laplacian である. また, Ω は領域であり, Γ は境界とする. Γ は部分境界 Γ_u, Γ_q からなり, $\Gamma_u \cup \Gamma_q = \Gamma$, $\Gamma_u \cap \Gamma_q = \emptyset$ であるものとする.

式 (1) の初期値境界値問題に対応する時間域境界積分方程式は, Brebbia & Mansur の正則化を導入し, $u_0 = 0, v_0 = 0$

を仮定した上で次式で与える.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} u(\mathbf{y}, \tau) - \int_0^\tau \int_\Gamma u^*(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau) q(\mathbf{x}, t) d\Gamma_x dt \\ - \int_0^\tau \int_\Gamma q_1^*(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau) u(\mathbf{x}, t) d\Gamma_x dt \\ - \int_0^\tau \int_\Gamma q_2^*(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau) \dot{u}(\mathbf{x}, t) d\Gamma_x dt = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

ここで, u^* は式 (1) に対応する基本解であり, q_1^* は次式で与える.

$$q_1^* = \frac{r}{2\pi c^2} \frac{\partial r}{\partial n} \frac{H(c(\tau - t) - r)}{(\tau - t)^2 \sqrt{(\tau - t)^2 - (r/c)^2}}, \quad (3)$$

なお, $H(\cdot)$ は Heaviside 関数, $r = |\mathbf{y} - \mathbf{x}|$ であり, $q_2^* = (\tau - t)q_1^*$ で与える.

式 (2) の時間についての離散化は, 各時間ステップ間で u に線形近似, q に後退方向区間一定近似, $\dot{u}$ に後退差分近似を導入した上で, 選点法を適用する. 一方, 境界積分方程式の離散化は, 境界値関数を wavelet 展開で近似したうえで, 近似基底を用いた Galerkin 法により行う. 境界値関数 $u^{(p)}(\mathbf{x}), q^{(p)}(\mathbf{x})$ の wavelet 展開は次式で与えられる.

$$\begin{aligned} u^{(p)}(\mathbf{x}) &\approx \sum_{j=1}^{n_s} \hat{u}_{0,j} \phi_{0,j}(\mathbf{x}) + \sum_{k=0}^m \sum_{l=1}^{n_w(k)} \hat{u}_{k,l} \psi_{k,l}(\mathbf{x}), \\ q^{(p)}(\mathbf{x}) &\approx \sum_{j=1}^{n_s} \hat{q}_{0,j} \phi_{0,j}(\mathbf{x}) + \sum_{k=0}^m \sum_{l=1}^{n_w(k)} \hat{q}_{k,l} \psi_{k,l}(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (4)$$

ここで, $\phi_{0,j}(\mathbf{x})$ は scaling 関数, $\psi_{k,l}(\mathbf{x})$ は wavelet であり, 本研究では Haar wavelet および 3 次ゼロモーメント性を有する区間一定非直交 wavelet²⁾のいずれかを ψ として与える. ϕ についてはいずれの場合も区間一定関数となる.

境界値関数の時間・空間の変動を近似した結果 (空間については式 (4)) を式 (2) に代入し, 時間については選点法, 境界積分方程式の離散化において Galerkin 法を適用すると, 時刻 $\tau = \tau_L$ において解くべき次の代数方程式を得る.

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{L,2}^{(L)} \mathbf{u}^{(L)} - \mathbf{G}_L^{(L)} \mathbf{q}^{(L)} \\ = \sum_{p=1}^{L-1} \left\{ -\mathbf{H}_{p,2}^{(L)} \mathbf{u}^{(p)} + \mathbf{H}_{p,1}^{(L)} \mathbf{u}^{(p-1)} + \mathbf{G}_p^{(L)} \mathbf{q}^{(p)} \right\} \end{aligned} \quad (5)$$

ここで, $\mathbf{G}_p^{(L)}, \mathbf{H}_{p,1}^{(L)}, \mathbf{H}_{p,2}^{(L)}$ は係数行列であり, その成分は切り捨て対象となる.

係数成分の切り捨ては, 不要な計算を可能な限り省略す

Key Words: 非定常波動伝播問題, 時間域境界要素法, wavelet, 計算効率

〒 950-2181 新潟県新潟市西区五十嵐二の町 8050 番地 TEL (025) 262-7274 FAX (025) 262-7274

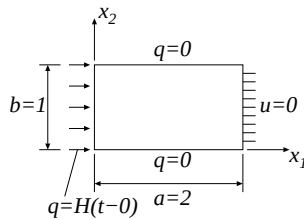


図1 解析条件.

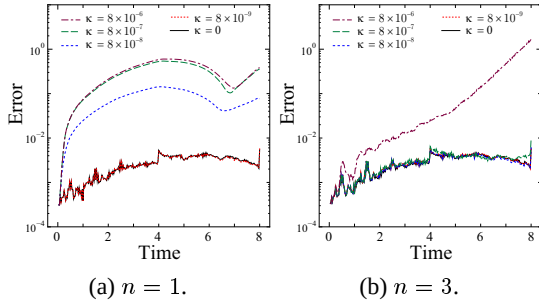


図2 解の誤差の時刻歴.

る目的で、各係数成分の計算の前後2段階で判定する。
本手法では、次式を満たす成分が切り捨て対象となる。

$$\begin{aligned} \tilde{g}_{ij}^{(L,p)} &\leq \kappa \cdot g_{ref}, \quad (\text{a priori}) \\ |g_{ij}^{(L,p)}| &\leq \kappa \cdot g_{ref}, \quad (\text{posteriori}) \end{aligned} \quad (6)$$

ここで、 κ は切り捨て基準値、 $\tilde{g}_{ij}^{(L,p)}$ は実際に計算される係数行列 $\mathbf{G}_p^{(L)}$ の成分 $g_{ij}^{(L,p)}$ の近似評価値⁵⁾、 g_{ref} は $g_{ij}^{(L,p)}$ の代表値である。

3. ゼロモーメント次数の高次化の有効性の検討

非定常波動問題における時間域境界要素解析の効率化に対する wavelet 基底のゼロモーメント次数の高次化の効果を検討する目的で、図1に示す条件の下で解析を行った。なお、解析自由度は $N = 288$ とし、時間については $\Delta t = 0.03125$ の下で $t = 8$ まで解析を行った。 $t = 8$ は当該の例題の波動ポテンシャル u の周期に一致する。

まず、近似解の誤差ノルムの時刻歴を図2に示す。 $n = 1$ 、 $n = 3$ いずれの場合も切り捨てを実行しても近似解の誤差が変化しないような切り捨て基準値が存在することが分かる。

次に、各計算時刻で生成される係数行列成分の圧縮率(解析自由度の2乗に対する新規保存成分の百分率)を図3に示す。なお、第1ステップ生成成分は連立方程式の係数行列となり、第2ステップ以降の生成成分は畳み込み積分計算に用いる成分となる。ゼロモーメント次数を高次化して $n = 3$ に設定すると、同一時刻での生成行列の圧縮率を低下することから、ゼロモーメント次数の高次化はメモリ削減に対して効果が認められることが確認できる。

また、各計算時刻での係数行列成分の生成に要する計算時間を図4に示す。計算時間については、このほとんどが係数成分の計算に費やされており、1成分あたりの計算量

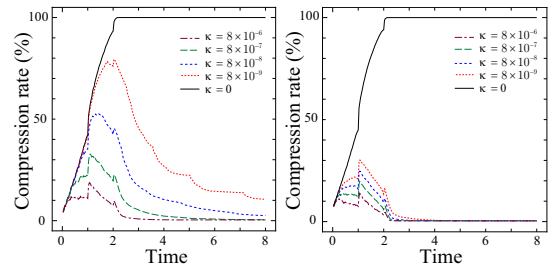
(a) $n = 1$.(b) $n = 3$.

図3 各時刻で生成される係数行列の圧縮率.

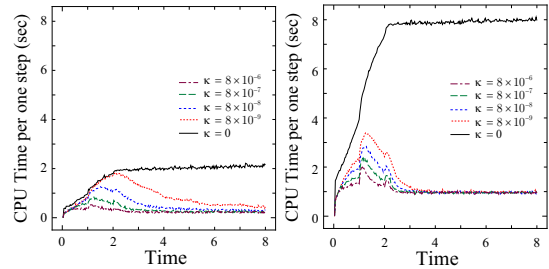
(a) $n = 1$.(b) $n = 3$.

図4 各計算時刻あたりの計算時間.

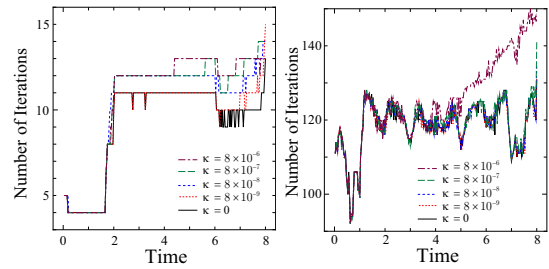
(a) $n = 1$.(b) $n = 3$.

図5 各計算時刻あたりの GMRES の反復回数.

が多い $n = 3$ の場合の方が保存成分数が少ないにも関わらず多くの計算時間を要している。これは事前評価式の予測精度の影響もあると思われる。最後に、連立方程式の求解に用いる GMRES 法の反復回数の時刻歴を図5に示す。前処理に対角スケーリングを採用していることもあり、基底のサポートが大きくなる $n = 3$ の場合の方が反復解の収束が緩慢になっている。ただし、解の精度が維持されている範囲内では時間経過とともに反復回数が著しく増加することではなく、GMRES 法の収束も安定していることがわかる。

参考文献

- 1) Nishimura, N.: Fast multipole accelerated boundary integral equation methods. *Appl. Mech. Rev.*, Vol.55, No.4, pp.299-324, 2002.
- 2) Koro, K., Abe, K.: Non-orthogonal spline wavelets for boundary element analysis. *Engrg. Anal. Bound. Elems.*, Vol.25, pp.149-164, 2001.
- 3) Ravník, J., Skerget, L., Hribersek, M.: The wavelet transform for BEM computational fluid dynamics. *Engrg. Anal. Bound. Elems.*, Vol.28, pp.1303-1314, 2004.
- 4) 紅露一寛, 五十嵐和希, 阿部和久: 拡散問題を対象とした時間域境界積分方程式法における wavelet 基底の適用とその計算効率. 計算数理工学論文集, Vol.9, pp.73-78, 2009.
- 5) 紅露一寛, 古川 陽, 阿部和久: スカラー波動問題を対象とした時間域境界要素解析における wavelet 基底の適用. 第 58 回理論応用力学講演会講演論文集, pp.117-118, 2009.