

時間・空間の離散化に wavelet 基底を用いた 時間域境界要素法とその拡散問題への適用

新潟大学 学生員 佐藤鉄太郎
新潟大学 正会員 紅露一寛
新潟大学 正会員 阿部和久

1. はじめに

近年,境界要素解析の高速化・効率化を図る手法の開発,および実用化に関する研究成果が活発に報告されており,高速多重極展開法¹⁾や wavelet 法²⁾がその代表である. Wavelet 法は,境界積分方程式の離散化に用いる基底関数として wavelet 基底を用いる方法である. 基底関数のゼロモーメント性により,離散化により得られる係数行列成分の大半が微小な成分となり,それらを切り捨てる(0とみなす)ことで係数行列を疎行列化し,計算効率の向上を図り大規模問題への適用可能性を高める方法である.

Wavelet 法は,これまで適用の大半が Laplace 問題や Helmholtz 問題などの定常問題になっており,拡散問題や波動伝播問題に代表される非定常問題,特にこれらの問題を時間域境界要素法で解析するための wavelet 法の導入・実用化に関する研究成果は,流れ解析に適用した Ravník らの研究³⁾や,著者らの線形拡散問題での wavelet 法の計算効率に関する検討⁴⁾,非定常波動問題での適用事例⁵⁾などがあげられる. なお,これらはいずれも wavelet を境界積分方程式の離散化に適用したもので,時間方向の離散化は従来法で処理したものである. しかしながら, wavelet は境界値関数の時間変動の近似等にも活用することができ⁶⁾,時間についての離散化と境界積分方程式の離散化の双方で wavelet 基底を用いる方法も構築できる. そこで本研究では,線形拡散問題を対象に,時間・空間の離散化に wavelet 基底を用いた時間域境界要素法を提案し,その定式化の妥当性について検討する.

2. 時間・空間の離散化に wavelet 基底を適用した時間域境界要素法

本研究では,非定常熱伝導問題(線形拡散問題)を対象とする. 定式化は,次の時間域境界積分方程式から始める.

$$\frac{1}{2}u(\mathbf{y}, \tau) + \int_0^\tau \int_\Gamma kq^*(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau)u(\mathbf{x}, t)d\Gamma_x dt - \int_0^\tau \int_\Gamma ku^*(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau)q(\mathbf{x}, t)d\Gamma_x dt = 0, \quad (1)$$

ここで, Γ は物体境界であり, t, τ は時間変数である. また, u はポテンシャル, $q = \partial u / \partial n$ であり, k は拡散係数である. n は外向き法線方向を表し, $u^*, q^* = \partial u^* / \partial n$ は基本解であ

る. なお,式(1)では,初期条件として $u(\mathbf{x}, 0) = u_0(\mathbf{x}) = 0$ を仮定している.

まず,式(1)の u, q の時間変動を次式の wavelet 展開によって近似する.

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}, t) &\approx \sum_{\alpha=1}^{n_s} \hat{u}^{(\alpha)}(\mathbf{x})\phi^{(\alpha)}(t) \\ &\quad + \sum_{\mu=0}^m \sum_{\beta=1}^{n_w(\mu)} \tilde{u}^{(\mu,\beta)}(\mathbf{x})\psi^{(\mu,\beta)}(t), \\ q(\mathbf{x}, t) &\approx \sum_{\alpha=1}^{n_s} \hat{q}^{(\alpha)}(\mathbf{x})\phi^{(\alpha)}(t) \\ &\quad + \sum_{\mu=0}^m \sum_{\beta=1}^{n_w(\mu)} \tilde{q}^{(\mu,\beta)}(\mathbf{x})\psi^{(\mu,\beta)}(t), \end{aligned} \quad (2)$$

ここで, $\phi^{(\alpha)}, \psi^{(\mu,\beta)}$ はそれぞれ時間近似に用いる scaling 関数, wavelet であり, $\hat{u}^{(\alpha)}, \tilde{u}^{(\mu,\beta)}, \hat{q}^{(\alpha)}, \tilde{q}^{(\mu,\beta)}$ は展開係数である. m は最高階層, $n_s, n_w(\mu)$ はそれぞれ $\phi^{(\alpha)}, \psi^{(\mu,\beta)}$ の個数である.

さらに,式(2)の展開係数を,境界上で定義された wavelet 展開により次式のように近似する.

$$\begin{aligned} \hat{u}^{(\alpha)}(\mathbf{x}) &\approx \sum_{j=1}^{N_s} \hat{u}_j^{(\alpha)}\phi_j(\mathbf{x}) + \sum_{k=0}^M \sum_{l=1}^{N_w(k)} \tilde{u}_{k,l}^{(\alpha)}\psi_{k,l}(\mathbf{x}), \\ \tilde{u}^{(\mu,\beta)}(\mathbf{x}) &\approx \sum_{j=1}^{N_s} \hat{u}_j^{(\mu,\beta)}\phi_j(\mathbf{x}) + \sum_{k=0}^M \sum_{l=1}^{N_w(k)} \tilde{u}_{k,l}^{(\mu,\beta)}\psi_{k,l}(\mathbf{x}), \\ \hat{q}^{(\alpha)}(\mathbf{x}) &\approx \sum_{j=1}^{N_s} \hat{q}_j^{(\alpha)}\phi_j(\mathbf{x}) + \sum_{k=0}^M \sum_{l=1}^{N_w(k)} \tilde{q}_{k,l}^{(\alpha)}\psi_{k,l}(\mathbf{x}), \\ \tilde{q}^{(\mu,\beta)}(\mathbf{x}) &\approx \sum_{j=1}^{N_s} \hat{q}_j^{(\mu,\beta)}\phi_j(\mathbf{x}) + \sum_{k=0}^M \sum_{l=1}^{N_w(k)} \tilde{q}_{k,l}^{(\mu,\beta)}\psi_{k,l}(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (3)$$

なお, ϕ_j, ψ_{kl} はそれぞれ境界上の wavelet 展開に用いる scaling 関数, wavelet であり, $\hat{u}_j^{(\alpha)}, \tilde{u}_{k,l}^{(\alpha)}, \hat{u}_j^{(\mu,\beta)}, \tilde{u}_{k,l}^{(\mu,\beta)}, \hat{q}_j^{(\alpha)}, \tilde{q}_{k,l}^{(\alpha)}, \hat{q}_j^{(\mu,\beta)}, \tilde{q}_{k,l}^{(\mu,\beta)}$ は展開係数である. M は最高階層であり, $N_s, N_w(k)$ はそれぞれ ϕ_j, ψ_{kl} の個数である.

ここで,式(2),(3)を式(1)に代入することにより生じる残差を $r(\mathbf{y}, \tau)$ と定義し,離散化条件として次の Galerkin 条件を課す. $\bar{\tau}$ を解析によって時間変動を評価したい時間の上限として,

$$\int_0^{\bar{\tau}} \int_\Gamma r(\mathbf{y}, \tau)w_i(\mathbf{y}, \tau)d\Gamma_y d\tau = 0. \quad (4)$$

Key Words: 拡散問題, 時間域境界要素法, wavelet, 計算効率

〒950-2181 新潟県新潟市西区五十嵐二の町 8050 番地 TEL (025) 262-7274 FAX (025) 262-7274

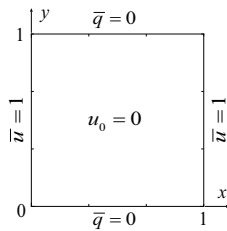


図1 解析条件．

ただし， $(i = 1, \dots, N_b \cdot N_t)$ とし， N_t は式 (2) の自由度， N_b は式 (3) の自由度であり，重み関数 w_i は次式で示す時空の基底関数のテンソル積で定義する．

$$\begin{aligned} \{w_i(\mathbf{y}, t) | i = 1, \dots, N_b \cdot N_t\} \\ = \{ \phi_a(\mathbf{y})\phi^{(j)}(t), \phi_a(\mathbf{y})\psi^{(k,l)}(t), \\ \psi_{b,c}(\mathbf{y})\phi^{(j)}(t), \psi_{b,c}(\mathbf{y})\psi^{(k,l)}(t) | \\ a = 1, \dots, N_s, b = 0, 1, \dots, M, \\ c = 1, \dots, N_w(b), j = 1, \dots, n_s, \\ k = 0, 1, \dots, m, l = 1, \dots, n_w(k) \}, \end{aligned} \quad (5)$$

その結果， $N_b \cdot N_t$ 元の連立一次方程式を得る．

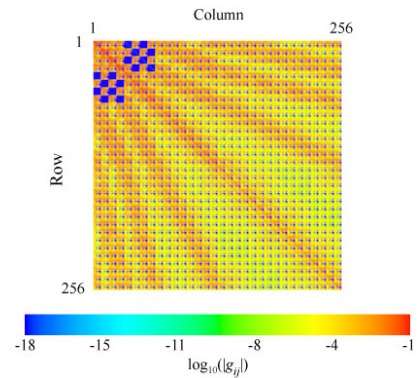
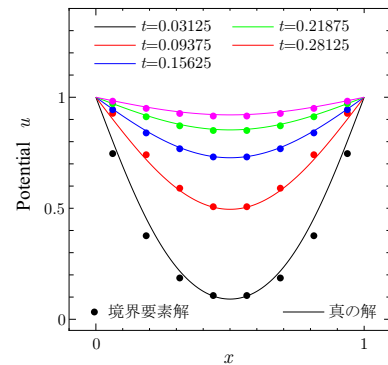
$$HU = GQ, \quad (6)$$

ここで， G, H はそれぞれ基本解 u^*, q^* の境界・時間積分により得られた係数行列であり， U, Q はそれぞれ u, q の展開係数を成分に持つベクトルである．これらのベクトルの成分を未知成分について解き，境界上および時間方向に wavelet 級数の再構成を行うと，境界上の u, q の時刻歴を評価することができる．

3. 解析結果

上述の解析手法の妥当性を検討する目的で，図1に示す境界条件・初期条件の下で境界要素解析を行った．境界上の u, q は，各部分境界で1個の scaling 関数を配置した上で，空間の最高階層を $m = 2$ wavelet 展開によって近似した．解析時間は $[0, 0.5]$ の範囲とし，この区間に scaling 関数を1個配置し，時間の最高階層を $M = 2$ として wavelet 展開を導入した．その結果，式 (6) の代数方程式の自由度は， $N = (8 \times 4) \times 8 = 256$ となっている．なお，空間・時間の近似とも wavelet には Haar wavelet を使用している．

まず，式 (6) の行列 G のスパース化の可能性を確認するために，成分 $|g_{ij}|$ の大きさを示す $\log_{10} |g_{ij}|$ の分布を図2に示す．なお，この結果では係数の切り捨ては実行しておらず，因果律等の影響から成分の値が0となる成分については， $|g_{ij}| = 1.0 \times 10^{-18}$ として結果を出力している．解析結果から，因果律の影響以外にも，係数成分がその絶対最大値に比べて微小となっているものが多数認められ，切り捨てによる係数行列の疎行列化が期待できる．

図2 G 行列成分 $|g_{ij}|$ の大きさ $\log_{10} |g_{ij}|$ の分布．図3 ポテンシャル u の時間変動．

次に， $y = 0$ なる部分境界上での近似解 u の時間変動を図3に示す．本手法で得られた解は，時間間隔0.5を8等分して得られた区間一定部分の中央の時刻でのポテンシャル値によく一致しており，時間方向の刻み幅を非常に大きく設定した場合でも良好な精度で境界要素解が得られている．

4. おわりに

本研究では，時間域境界積分方程式の時間・空間の離散化に wavelet 基底を用いる定式化を示し，解析結果を通してその妥当性を示した．係数行列成分の分布から，因果律の影響以上に大半の成分が微小となり，成分の切り捨てによる使用メモリの削減・解析時間の短縮が期待できることが分かった．今後は，成分の切り捨てを実行し，当該手法の計算効率について検討することとしたい．

参考文献

- 1) Nishimura, N.: Fast multipole accelerated boundary integral equation methods. *Appl. Mech. Rev.*, Vol.55, No.4, pp.299-324, 2002.
- 2) Koro, K., Abe, K.: Non-orthogonal spline wavelets for boundary element analysis. *Engrg. Anal. Bound. Elems.*, Vol.25, pp.149-164, 2001.
- 3) Ravnik, J., Skerget, L., Hribersek, M.: The wavelet transform for BEM computational fluid dynamics. *Engrg. Anal. Bound. Elems.*, Vol.28, pp.1303-1314, 2004.
- 4) 紅露一寛，五十嵐和希，阿部和久：拡散問題を対象とした時間域境界積分方程式法における wavelet 基底の適用とその計算効率．*計算数理工学論文集*，Vol.9, pp.73-78, 2009.
- 5) 紅露一寛，古川 陽，阿部和久：スカラー波動問題を対象とした時間域境界要素解析における wavelet 基底の適用．第58回理論応用力学講演会講演論文集，pp.117-118, 2009.
- 6) Barmada, S.: Improving the performance of the boundary element method with time-dependent fundamental solutions by the use of a wavelet expansion in the time domain. *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, Vol.71, pp.363-378, 2007.