

有限要素法による移流拡散解析における透過境界条件の検討

日本大学大学院 学生会員 ○桜井宏之

日本大学 フェロー 野村卓史

日本大学 正会員 長谷部寛

1. はじめに

市街地の風を対象とする汚染物質の移流拡散解析において、領域境界の拡散に関する境界条件の扱いが不適切だと汚染物質が溜まってしまい、不当に高い濃度になる結果が生じる。このため、境界条件は正しい扱いが必要である。一般に波動等の純移流問題においては、透過境界条件として Mur の条件等が用いられるが¹⁾、拡散の影響は考慮されていない。そこで本研究では、境界における拡散を考慮した透過境界条件について検討した。

2. 基礎方程式と有限要素法による離散化

本研究では、非定常の移流拡散方程式を基礎方程式とする。

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla (q^a + q^d) = 0 \quad (1)$$

$$q^a = u \phi \quad (2)$$

$$q^d = -k \nabla \phi \quad (3)$$

ここで、 ϕ は濃度、 q^a は移流フラックス、 q^d は拡散フラックス、 u は移流速度ベクトル、 k は拡散係数である。

本研究では空間の離散化に Galerkin 有限要素法、要素には 3 次元の六面体要素、時間積分法には Predictor-Corrector 法を適用した。

3. 拡散解析における基本的な境界条件

解析領域として図 1 に示すような x 軸方向に 200 要素の長方形領域を用い 1 次元純拡散問題 ($u=0$) を取り上げる。初期濃度分布と時刻ごとの理想解を図 2 に示す。

拡散問題における基本的な境界条件には、濃度規定の条件と、フラックス規定の条件と、通常 2 つがある。これらの境界条件を右端境界に適用した解析結果を図 3 に示す。濃度規定の条件 ($\phi=1$) では常に濃度が 1 となるように変化し、フラックス規定の条件 (ゼロフラックスの条件 $q^d=0$) では高い濃度となる。その結果、全体の濃度分布は理想解と大きく異なるものとなる。

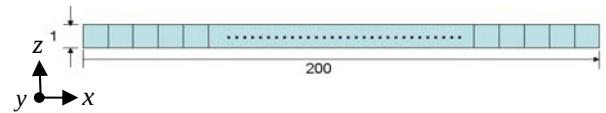


図 1. 1 次元の解析モデル

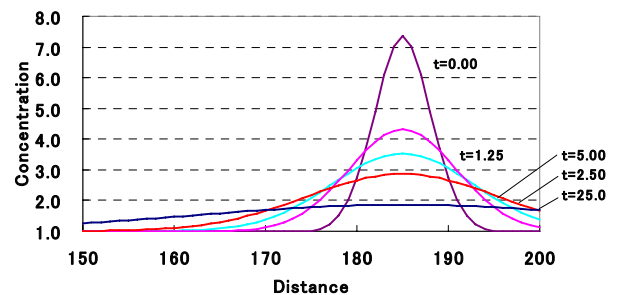


図 2. 初期濃度分布と濃度分布の時間変化

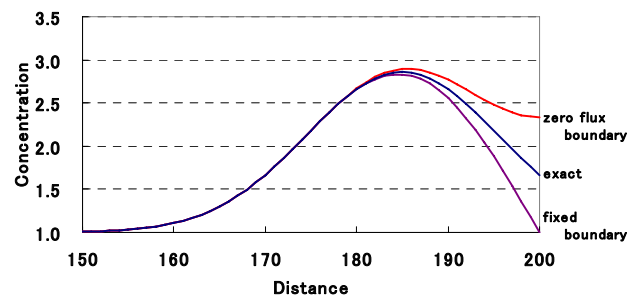


図 3. 境界条件の違いによる濃度分布 ($t=5.00$)

4. 拡散を考慮した透過境界の扱い

濃度規定の条件とフラックス規定の条件の間をとるような値を得るための境界条件として、本研究では式(4)、(5)の境界条件を考え、検討した。

$$\phi_N^{i+1} = \phi_N^i + (1 - \beta) \Delta t \cdot q_N^d \quad (4)$$

$$q_N^d = -k \cdot \frac{\phi_N^i - \phi_{N-1}^i}{\Delta x} \quad (5)$$

ここで β を透過量調節係数と呼ぶ。 Δt は時間積分間隔、上付き添字は時間ステップ、下付き添字は節点を表し、 N は境界上の節点である。式(4)の右辺第二項のように、拡散フラックス q_N^d に時間積分間隔 Δt を乗じた値の割合を係数 β により規定し、境界上節点の濃度 ϕ の変化量として加えることにより、次ステップ

キーワード 有限要素法, 移流拡散解析, 透過境界条件

連絡先 〒101-8308 東京都千代田区神田駿河 1-8-14 日本大学理工学部土木工学科 TEL 03-3259-0411

($i+1$)の境界上節点の濃度を評価して、それを境界値として与える方法とした。なお $\beta=1$ は濃度規定の条件に相当する。

5. 透過量調節係数の検討

1次元での $u=0$, $k=10$ の拡散問題で式(4), (5)で表される拡散透過境界条件の検討を行った。時間積分間隔は $\Delta t=0.005$ で、総計算時間 25.0 まで計算を行った。左端は濃度規定の境界($\phi=1$)として与えた。

図4は同時刻($t=5.00$)における β ごとの濃度分布である。 $\beta=1$ として与えた場合、式(4)の右辺第二項は消去されることから、常に初期の規定値と同様の値をとる結果となる。 $\beta=0$ の場合は計算初期の段階で解が発散した。その他、 $\beta=0.70, 0.80, 0.95$ と与えた場合においても理想解と比べて不十分な分布となった。

そこで、 β を一定値ではなく、時間変化する値として与えた。式(6)のように、境界より1つ手前の節点($N-1$)に関するフラックスより β_2 を求め、その β_2 に0.985~0.990を乗じて式(4)の β として用いた。

その結果、理想解に対して良い近似解を得ることができた(図5)。

$$\beta_2 = \frac{(\phi_{N-1}^{i+1} - \phi_{N-1}^i) \cdot \Delta x}{\Delta t \cdot k \cdot (\phi_{N-1}^i - \phi_{N-2}^i)} + 1 \quad (6)$$

6. 透過境界条件を適用した2次元解析

図6に示すような領域で上下両端の境界条件を変え、2次元解析を行い、その結果を比較した。ここで総要素数は x 軸方向に100要素、 y 軸方向に30要素の3000要素を用いた。また初期濃度分布には1次元解析で用いた分布を軸対象にした分布を解析領域中心に与えた。 $u=0$, $k=10$, 時間積分間隔は $\Delta t=0.005$ とし、総計算時間 25.0 まで計算を行った。左右両端の境界は、濃度規定の境界($\phi=1$)とした。

図7に、上下の境界条件が異なる3ケースの濃度分布を示す。通常境界条件を与えた場合と比較すると、透過境界条件を与えた場合には、同心円状の濃度分布となり、理想的な結果が得られた。

7. おわりに

本研究では、拡散を考慮した透過境界条件を考え、境界内側の拡散フラックスから境界濃度の変化を評価する方法を検討した。拡散フラックスの空間的变化を考慮する係数 β_2 を用いることによって理想的といえる解が得られた。

今後は、移流がある場合での透過境界条件の有効性を検討する。

参考文献

1) 野村, 佐藤, 長谷部: 音の伝播解析におけるインピーダンス条件の適用について, 土木学会第64回年次学術講演会, 2009

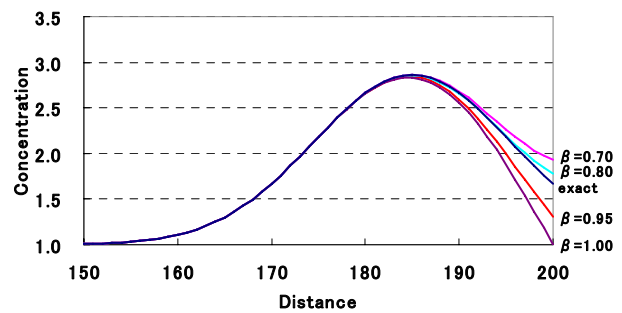


図4. 濃度分布の時間変化($t=5.00$)

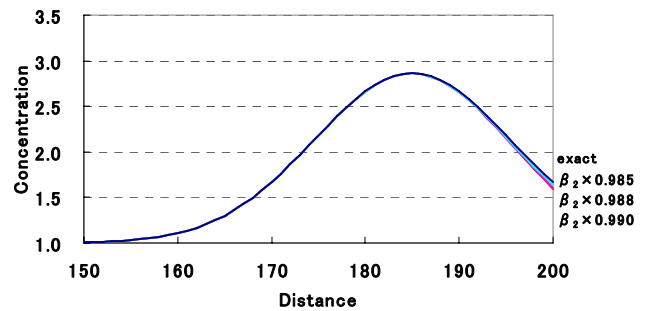


図5. 濃度分布の時間変化($t=5.00$)

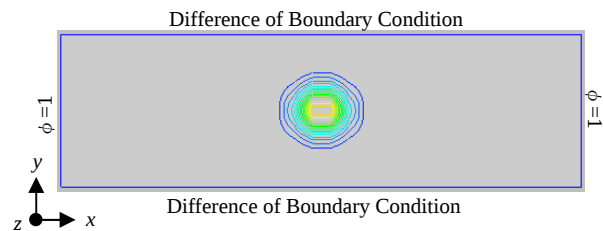
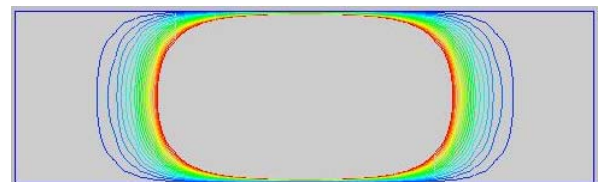
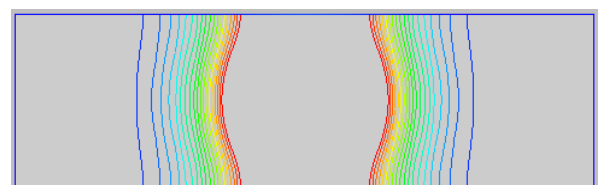


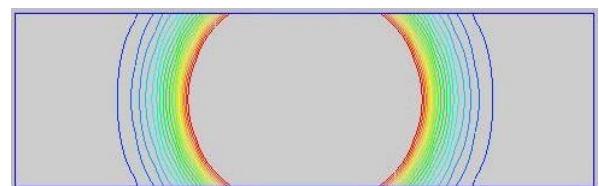
図6. 2次元解析の初期条件



(a) 濃度規定条件($\phi=1$)



(b) フラックス規定条件($q_n^d=0$)



(c) 透過境界条件($\beta_2 \times 0.989$)

図7. 2次元解析の濃度分布($t=5.00$)