

有限要素法による非圧縮性粘性流れ解析における直接法と分離型解法の比較

中央大学 学生員 ○ 清水 喬夫
中央大学 学生員 石坂 俊輔
中央大学 正会員 檜山 和男

1. はじめに

大気流れの挙動を把握することは、長大橋や高層ビルの計画・設計において、流体力や周辺の気流解析を行うことは重要である。これらについて検討するために、これまで数多くの数値シミュレーション手法が提案されているが、その中でも、有限要素法は幾何学的な形状への適用例に優れた手法である。有限要素法の解析手法は、大別すると直接法と分離型解法の二つに分けることができる。

本論文は、非圧縮性粘性流体の有限要素解析において、直接法と分離型解法の比較を、計算時間、計算精度の点で比較するものである。数値解析例として、定常流れの例として Cavity 内対流問題を、非定常流れの例として円柱周り流れ問題を取り上げる。

2. 数値解析手法

(1) 基礎方程式

非圧縮性粘性流体の Navier-Stokes 方程式、及び、連続式は、式 (1)、(2) で表される。

運動方程式；

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = 0 \quad (in \Omega) \quad (1)$$

連続式；

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (in \Omega) \quad (2)$$

上式において、 u_i は流速、 p は圧力、 Re は Reynolds 数を表し、 $Re = \frac{UL}{\nu}$ で定義される。 U 、 L はそれぞれ代表流速、代表長さであり、 ν は動粘性係数である。

(2) 直接法

直接法は、運動方程式と連続式を直接離散化し、圧力場と流速場を同時に解く手法である。本論文では式 (1)、(2) に対して、空間方向の離散化には SUPG/PSPG 法に基づく安定化有限要素法¹⁾ を適用し、有限要素には P1/P1 (流速・圧力一次補間) 要素を用いて離散化を行う。一方、時間方向の離散化には、2 次精度を有する Crank-Nicolson 法を用いた。なお、移流速度は 2 次精度 Adams-Bashforth 法により近似した。また、連立一次方程式の解法には、Element-by-Element GPBi-CG 法を用いた。

(3) 分離型解法

分離型解法は、圧力場と流速場を分離して解く方法である。運動方程式に対して準陽的解法を適用し、時間方向に前進差分を用いて離散化した運動方程式の発散を取り、連続式を代入することにより圧力に関する Poisson 方程式 (3)

が導かれる。

Poisson 方程式；

$$\frac{\partial^2 p^{n+1}}{\partial x_i^2} = \frac{1}{\Delta t} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_i} \quad (3)$$

なお、Poisson 方程式の右辺の $\tilde{u}_i$ は中間流速であり、式 (4) で定義される。

中間流速；

$$\tilde{u}_i = u_i^n - \Delta t \left\{ u_j^n \frac{\partial u_i^n}{\partial x_j} - \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_j^n}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^n}{\partial x_i} \right) \right\} \quad (4)$$

SUPG 法に基づく安定化有限要素法を式 (1)、(4) に適用し、有限要素には P1/P1 要素により離散化を行う。

式 (4) により $\tilde{u}_i$ を求め、式 (3) に代入することにより p^{n+1} を求める。求めた p^{n+1} を式 (1) に代入することにより流速 u_i^{n+1} を求め、時間進行を行なう。なお、連立一次方程式の解法には、Element-by-Element 前処理付 CG 法を用いた。

3. 数値解析例

(1) 2 次元 Cavity 内対流問題

定常流れ問題への適用例として、2 次元 Cavity 内対流問題を取り上げた。

a) 解析条件

解析領域、境界条件を図-1 に示す。なお、分離型解法では底面中心の 1 点において、 $p=0.0$ を与えた。有限要素分割には $32 \times 32(x \times y)$ 分割のケースを用い、Reynolds 数は、 $Re=100, 1000, 10000, 100000$ の 4 ケース、微小時間増分を $\Delta t = 10^{-3}, 10^{-2}, 10^{-1}$ の 3 ケース (合計 12 ケース) で、無次元時間 200 まで計算を行った。

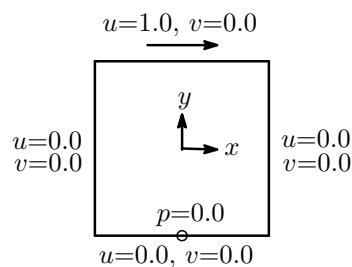


図-1 解析領域・境界条件

b) 解析結果・考察

図-2 に精度が同程度の場合における計算時間の比較を示す。図より、1step に必要な計算時間は分離型解法が短い。直接法では Δt が大きくとれるため、直接法は分離型解法より短時間で計算ができる結果となった。

KeyWords： 安定化有限要素法，直接法，分離型解法

連絡先： 〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27 TEL 03-3817-1815 FAX 03-3817-1803

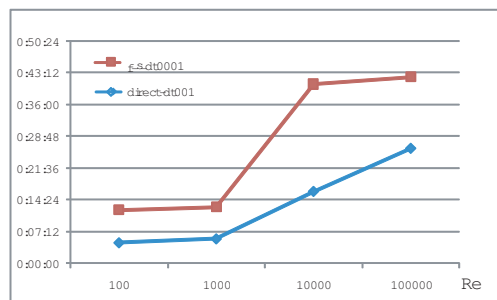


図-2 直接法と分離型解法の計算時間の比較

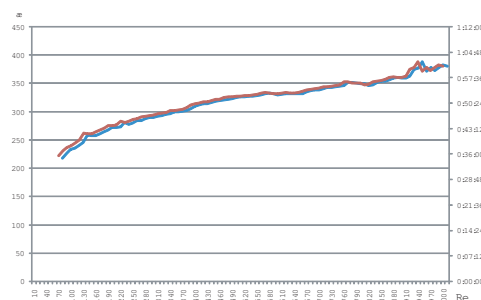


図-5 分離型解法の反復回数と計算時間の比較

(2) 2次元円柱周り流れ問題

次に非定常流れの適用例として、2次元円柱周り流れ問題を取り上げた。

a) 解析条件

図-3に解析領域、境界条件を示す。また、メッシュの最小分割幅を0.015Dとした。そして、Reynolds数は10から1000まで、10づつ区切り、微小時間増分量は $\Delta t = 0.005$ とし、無次元時間200まで解析を行い、反復回数と計算時間について変化の比較を行った。また、同程度の精度のときの計算時間の比較を行った。なお、流出境界条件は、直接法の場合はトラクションフリーとし、分離型解法の場合には $p=0.0$ を用いた。

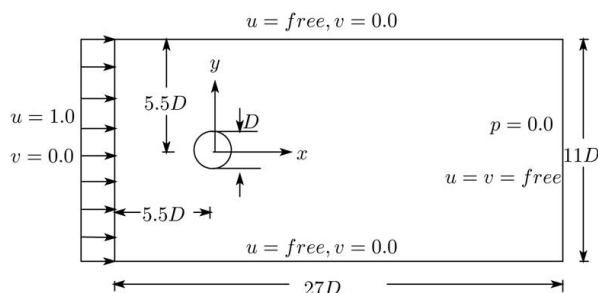


図-3 解析領域

b) 解析結果

図-4と図-5は、Reynolds数を変化させた場合の連立一次方程式を解く際の平均の反復回数と全計算時間を示したものである。図より、直接法も分離型解法も計算時間と反復回数には、比例関係が見られる。また、図-6は、同程度の精度の場合の計算時間の比較を示す。図より、直接法よりも分離型解法のほうが短時間で計算ができたことがわかる。

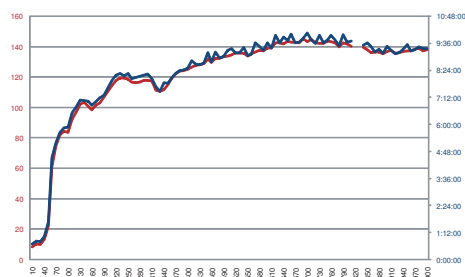


図-4 直接法の反復回数と計算時間の比較

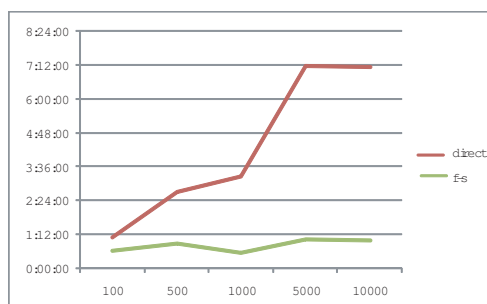


図-6 直接法と分離型解法の計算時間の比較

4. おわりに

本論文は、非圧縮性粘性流体の有限要素法解析において、直接法と分離型解法の比較を計算精度、計算時間、計算効率の観点から比較を行った。数値解析例を通して以下の結論を得た。

- 微小時間増分量が同一の場合には、直接法のほうが参照結果と良い一致が見られた。
- 定常流れ問題の場合には直接法のほうが計算時間の点で有利な結果となった。一方、非定常的な流れ問題の場合には、分離型解法のほうが計算時間の点で有利な結果となった。これは、連立一次方程式の解法における反復回数に起因する。

今後の課題として、三次元解析における比較が挙げられる。

参考文献

- 1) T.E.Tezduyar : Stabilized finite element formulations for incompressible flow computations, *Advance in applied Mechanics*, **28**, pp1-44, 1991.
- 2) U.Ghia, K.N.Ghia, C.T.Shin, 'High-Re Solution for Incompressible Flow Using the Navier-Stokes Equations and a Method', *Journal of Computational Physics*, **48**, pp387-411, 1982
- 3) Cantwell B. and Coles, D. : An experimental study of entrainment and transport in the turbulent near wake of a circular, *J.Fluid mech*, **136**, pp.321-374, 1983.
- 4) 土木学会：いまさら聞けない計算力学の常識，丸善株式会社，2008年
- 5) 日本計算工学会流れの有限要素法研究委員会：続・有限要素法による流れのシミュレーション，シュプリンガー・ジャパン株式会社，2008年