

信頼性設計による性能明示型設計のリスク分担分析(その1: 公式の導出)

○中央大学 学生会員 原本隆一

中央大学 学生会員 遠藤基織

中央大学 正会員 佐藤尚次

1. はじめに

設計方法が仕様設計と性能設計に分類されるという考え方が社会に受け入れられるようになり、早十年あまりが過ぎた。性能設計と言っても様々な分類がされているが、発注者側と設計者側との対話の手段として、性能マトリクスを用いた性能明示型設計という考え方は特に知られている。要求性能マトリクスは、専門家でない発注者でも要求性能が分かりやすいという点で注目されている。

要求性能マトリクスという、想定される地震動と構造物の満たすべき要求度の両方を選択するわけだが、地震動は再現期間や発生確率（構造物の供用期間あたりの）で表されている。この点において、作用における不確実性を確率表現しており、性能設計と同時に信頼性設計法とも言える。その一方で要求度は、構造物の状態を述べているだけにとどまっており、更なる具体性が欲しいところである。信頼性設計法からすると、作用側は不確実性の確率情報が含まれているが、抵抗側は確率情報ではないため信頼性評価が十分にはできず、信頼性設計法と言うには情報不足である。

これに対して、片出・香月らは文献 1)において不足している情報を補うために、瑕疵担保責任発生確率を信頼性評価、また設計をコントロールする指標として導入している。この瑕疵担保責任とは、想定していた作用値以下の作用のもとで破壊が生じてしまうことを言い、これは要求性能がクリアできない事象ということである。しかし、本研究においては信頼性評価ができるように、また欠けている情報を補うために、要求性能に着目し、抵抗側についても作用側と同様に数値表現をし、確率情報を与えることを提案する。つまり、作用側と抵抗側の両方の確率情報から破壊確率を算出しようというものである。また、破壊確率に加えて片出・香月らの提案した瑕疵担保責任発生確率も算出し、さらに瑕疵担保責任発生確率を、作用側・抵抗側の非超過確率を用いて近似することを試みることに重点をおく。

2. 超過・非超過確率を用いた研究手法

2.1. 破壊確率の算出

まず、本研究の研究内容を分かりやすく図示するために、R-S モデルを用いて説明する。図-1 で示す斜線部分を超過確率、非超過確率と呼ぶこととする。これは、S 側 R 側の設計値をそれぞれ S^* , R^* としたときの超過確率、非超過確率ということである。これらの超過・非超過確率を e_S , e_R と書くことにする。数式化すると以下の式(1), (2)と表せる。また、性能関数を式(3)のように表す。

$$\Pr.[S \geq S^*] = e_S \quad (1)$$

$$\Pr.[R \leq R^*] = e_R \quad (2)$$

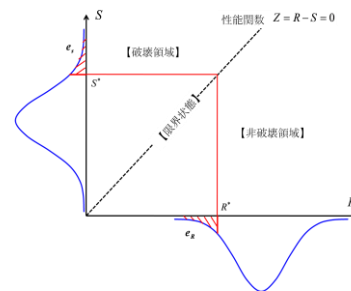


図-1 R-S モデルにおける限界状態

$$Z = R - S \quad (3)$$

構造物が破壊する場合は性能関数 Z が負となる場合であるが、ここではイコールの元で破壊確率の算出を行う。性能関数 $Z = 0$ は 45° の傾きをもつ直線となり、 $Z < 0$ となる破壊事象は直線の上側となる。また、 $Z > 0$ となる非破壊事象は直線の下側となる。設計式は式(4)となるが、先述の通りイコールの元で破壊確率の算出を行う。

$$S^* \leq R^* \quad (4)$$

超過確率・非超過確率を用いた破壊確率の算出方法は以下ようになる。まず、式(1), (2)を用いて信頼性指標 β を式(6)より求める。信頼性指標は式(5)で定義される指標である。

$$\beta = -\Phi^{-1}(P_f) \quad (5)$$

$$\beta = -\frac{\Phi^{-1}(e_R)\sigma_R + \Phi^{-1}(e_S)\sigma_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} \quad (6)$$

ここで、

Φ : 標準正規分布の確率密度関数

P_f : 破壊確率

σ_R : R 側の発生頻度の標準偏差

σ_S : S 側の発生頻度の標準偏差

なお、 Φ は以下の式(7)で表される。

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad (7)$$

そして、最後に式(6)で求めた信頼性指標 β から破壊確率 P_f を導く。破壊確率 P_f と信頼性指標 β との関係式は式(8)に示す通りである。

$$P_f = \Phi(-\beta) \quad (8)$$

算出した破壊確率とモンテカルロシミュレーションで解析した値との比較を表-1, 表-2 に示す。表中の e_S とは、再現期間に対する設計供用期間を 50 年としたときの発生確率であり、5%は 970 年再現期間に相当し、10%は 475 年の再現期間に相当する。また 22.2%と 39.5%は 200 年および 100 年再現期間に相当する。つまり、 e_S が小さいほど大きな作用である。表より精度良く一致していることが見て取れる。

キーワード：性能明示型設計、性能マトリクス、超過確率、瑕疵担保

連絡先：東京都文京区春日 1-13-27 中央大学大学院理工学研究科土木工学専攻 tel.03-3817-1816

表-1 破壊確率の比較

($\sigma_R : \sigma_S = 1:1$)

$e_R(\%)$	$e_S(\%)$	数式による $P_f(\%)$	シミュレーションによる $P_f(\%)$
0.1	5.0	0.04	0.04
0.1	10.0	0.10	0.10
0.1	22.2	0.32	0.33
0.1	39.5	0.88	0.89
1.0	5.0	0.25	0.26
1.0	10.0	0.54	0.54
1.0	22.2	1.44	1.45
1.0	39.5	3.34	3.33
5.0	5.0	1.00	1.01
5.0	10.0	1.93	1.93
5.0	22.2	4.42	4.40
5.0	39.5	8.83	8.80
10.0	5.0	1.93	1.93
10.0	10.0	3.50	3.49
10.0	22.2	7.39	7.36
10.0	39.5	13.69	13.69

表-2 破壊確率の比較

($\sigma_R : \sigma_S = 1:2$)

$e_R(\%)$	$e_S(\%)$	数式による $P_f(\%)$	シミュレーションによる $P_f(\%)$
0.1	5.0	0.22	0.22
0.1	10.0	0.57	0.58
0.1	22.2	1.94	1.94
0.1	39.5	5.26	5.26
1.0	5.0	0.60	0.61
1.0	10.0	1.44	1.44
1.0	22.2	4.23	4.23
1.0	39.5	10.05	9.99
5.0	5.0	1.37	1.37
5.0	10.0	2.99	3.00
5.0	22.2	7.78	7.75
5.0	39.5	16.51	16.51
10.0	5.0	2.05	2.05
10.0	10.0	4.28	4.28
10.0	22.2	10.42	10.37
10.0	39.5	20.86	20.88

表-3 超過確率による瑕疵担保発生確率

$e_R(\%)$	$e_S(\%)$	$P_f(\%)$								
		(σ_R/σ_S) 1:1	(σ_R/σ_S) 1:2	(σ_R/σ_S) 1:3	(σ_R/σ_S) 2:1	(σ_R/σ_S) 2:2	(σ_R/σ_S) 2:3	(σ_R/σ_S) 3:1	(σ_R/σ_S) 3:2	(σ_R/σ_S) 3:3
0.1	5.0	0.004	0.002	0.001	0.011	0.004	0.003	0.019	0.007	0.004
0.1	10.0	0.007	0.004	0.002	0.015	0.007	0.004	0.024	0.011	0.007
0.1	22.2	0.010	0.004	0.003	0.019	0.010	0.006	0.026	0.014	0.010
0.1	39.5	0.010	0.006	0.004	0.019	0.010	0.006	0.025	0.015	0.010
1.0	5.0	0.068	0.024	0.015	0.146	0.068	0.034	0.242	0.096	0.068
1.0	10.0	0.079	0.034	0.023	0.189	0.079	0.049	0.287	0.134	0.079
1.0	22.2	0.116	0.065	0.032	0.232	0.116	0.076	0.327	0.179	0.116
1.0	39.5	0.134	0.070	0.047	0.234	0.134	0.084	0.306	0.189	0.134
5.0	5.0	0.371	0.146	0.089	0.961	0.370	0.209	1.523	0.658	0.370
5.0	10.0	0.531	0.222	0.138	1.198	0.530	0.317	1.754	0.867	0.530
5.0	22.2	0.729	0.344	0.223	1.400	0.728	0.475	1.884	1.089	0.728
5.0	39.5	0.797	0.419	0.281	1.363	0.794	0.564	1.739	1.113	0.794
10.0	5.0	0.883	0.336	0.209	2.240	0.880	0.499	3.461	1.551	0.880
10.0	10.0	1.234	0.516	0.323	2.719	1.233	0.739	3.927	2.006	1.233
10.0	22.2	1.671	0.785	0.505	3.147	1.667	1.076	4.138	2.473	1.667
10.0	39.5	1.793	0.945	0.637	2.964	1.791	1.243	3.701	2.466	1.791

2.2. 瑕疵担保責任発生確率の算出

片出・香月らは設計をコントロールする指標として瑕疵担保責任発生確率 P_{sf} を決定している。しかし本節では、それは破壊確率と同様に従属変数であるべきと思われることから、2.1 節と同様に超過確率・非超過確率 e_S 、 e_R から瑕疵担保責任発生確率 P_{sf} を算出する。

算出方法は、2.1 節で求めた破壊確率のうち、設計作用レベル以下の作用のもとで破壊が生じる確率を求める。式で示すと(9)となる。

$$P_{sf} = \text{Pr}.[S \leq S^*] \cap \text{Pr}.[Z \leq 0] \quad (9)$$

結果は表-3 に示す通りである。R と S の標準偏差比 $\sigma_R : \sigma_S$ は 1:1 から 3:3 までの 9 通りで、それぞれ左から順に示している。

3. 瑕疵担保責任発生確率の近似

本章では、2 章で算出した瑕疵担保責任発生確率 P_{sf} を超過確率・非超過確率 e_S 、 e_R を用いて近似式として求めることを行う。まず、瑕疵担保責任発生確率は R 側の非超過確率と S 側の非超過確率、更には破壊確率の 3 つが組み合わさった箇所であるため、3 つの条件が独立であれば式(10)で表現される。

$$P_{sf} \approx e_R \times (1 - e_S) \times P_f \quad (10)$$

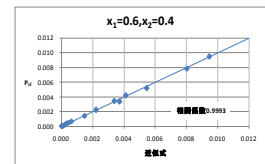
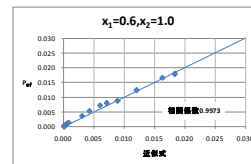
これは、式(11)に基づくように、瑕疵担保責任発生確率の領域を視覚的に考えれば理解しやすいであろう。

$$P_{sf} \approx \text{Pr}.[R \leq R^*] \cap \text{Pr}.[S \leq S^*] \cap \text{Pr}.[Z \leq 0] \quad (11)$$

しかし、実際には超過確率・非超過確率 e_S 、 e_R 破壊確率 P_f はそれぞれ独立ではないため、式(10)では近似することができない。そこで、式(10)に調整変数を加えることで、式(12)の近似式にすることとした。調整変数は、破壊確率 P_f のべき乗と定数倍の 2 つを加えることとした。

$$P_{sf} \approx e_R \times (1 - e_S) \times P_f^{x_1} \times x_2 \quad (12)$$

今回近似したのは 9 パターンであるが、図-2 に 2 パターンを示す。表の縦軸は、モンテカルロシミュレーションによるもので、横軸は式(12)の近似式によるもの



$\sigma_R : \sigma_S = 1:1$

$\sigma_R : \sigma_S = 1:2$

図-2 近似式とシミュレーションの関係

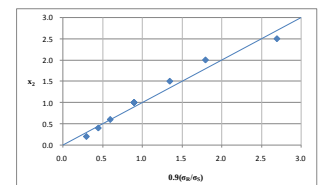
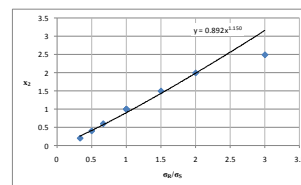


図-3 標準偏差比と調整変数 x_2 の関係

図-4 調整変数 x_2 の数式化

である。どのパターンも、相関係数が 0.99 以上となっており、強い相関が読み取れる。標準偏差が変わっても、調整変数 x_1 の値は 0.6 で変化していない。一方で調整変数 x_2 の値は、標準偏差によって変化しているのが読み取れる。このことに着目して、図-3 に縦軸に調整変数 x_2 を、横軸に σ_R / σ_S を取ったグラフを示す。グラフ中の近似曲線から x_2 は式(13)のように置き換えられると考察した。

$$x_2 = 0.9(\sigma_R / \sigma_S) \quad (13)$$

このときの x_2 と式(13)との関係を図-4 に示す。見て取れるように、概ね近似されていることがわかる。よって近似式(12)における調整変数 x_1 、 x_2 は、 x_1 については 0.6 に固定でき、 x_2 については式(13)で定式化できると考えられる。つまり、近似式は最終的に次の式(14)の形にまとめることが導けた。

$$P_{sf} \approx e_R \times (1 - e_S) \times P_f^{0.6} \times 0.9 \times (\sigma_R / \sigma_S) \quad (14)$$

参考文献

- 1) 片出 亮, 香月 智: リスク分担原則に基づく目標信頼性指標決定法の提案, 土木学会論文集 A 2009.2
- 2) 佐藤 尚次: 超過確率に基づく構造設計の確率論的基礎, 350 号土木学会論文集 1984.10