# 最適化理論に基づいたRC構造物の鉄筋径およびかぶりの推定手法に関する研究

中央大学大学院　理工学研究科土木工学専攻　学生会員 ○ 王　会娟
長岡技術科学大学　機械系　機械情報・制御工学　正会員　倉橋　貴彦
中央大学　理工学部土木工学科　正会員　大下　英吉

## 1. はじめに

鉄筋コンクリートにおける鉄筋の径やかぶりに関する現在の主たる非破壊検査手法には，電磁レーダ法，電磁誘導法などが挙げられる。かぶりに関しては，いずれの手法においても比較的精度良く推定が可能であるが，鉄筋径に関しては電磁誘導法のみによる推定に留まり，その精度は非常に悪い。すなわち，現時点において，鉄筋径を精度良く推定する手法は確立されておらず，かぶりも同時に評価可能とする手法は皆無であるといっても過言ではない。本研究は，電磁レーダ法により鉄筋の径やかぶりを同時にかつ精度良く評価することのできる非破壊検査手法の確立を最終目的として，その基礎的研究に位置付け，形状最適化理論に基づいて鉄筋の径とかぶりを同時に推定可能とする手法を構築する。

## 2. 形状最適化理論に基づく鉄筋径およびかぶりの推定手法の構築

### 2.1 評価関数

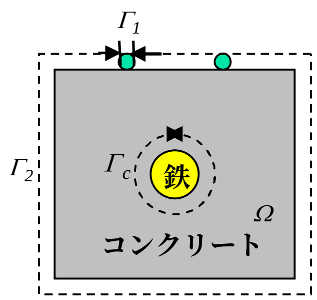
本研究においては，コンクリート表面のある計測点における鉄筋からの反射波と有限要素法に基づき計算された反射波を一致させるような最適な鉄筋径とかぶりを同時に推定するものである。したがって，評価関数は計算により求まった反射波と計測波の残差二乗和により式(1)のように定義する。

$$J=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}\int_{\Omega}\left(u-u_{obs.}\right)Q\left(u-u_{obs.}\right)d\Omega dt \tag{1}$$

$u_{obs.}$ ：計測波の振幅の時系列値(単位：volt)
$u$ ：計算波の振幅の時系列値(単位：volt)
$t_f$ ：観測時間の終端時刻，7nsと設定している
$Q$ ：重み定数，計測点には1，それ以外には0

形状最適化問題においては，式(2)に示す波動方程式および式(3)～式(6)に示す初期条件と境界条件のもとで評価関数を最小とする鉄筋径およびかぶりを求めることとなる。

$$\ddot{u}+\eta\dot{u}-c^2u_{,ii}=0 \tag{2}$$
$$u=0 \quad at \quad t=t_0 \quad in \quad \Omega \tag{3}$$
$$\dot{u}=0 \quad at \quad t=t_0 \quad in \quad \Omega \tag{4}$$
$$u=\hat{u} \quad on \quad \Gamma_1 \tag{5}$$
$$b=c^2u_{,i}n_i=0 \quad on \quad \Gamma_2 \quad and \quad \Gamma_c \tag{6}$$




図－1 計算領域

ここで，計算領域は図－1に示すように定義される。$\eta$は減衰係数であり，ゼロとしている。$\Gamma_1$は電磁波を入力する境界，$\Gamma_2$は入力点以外の表面境界，$\Gamma_c$は鉄筋周りの境界，$\Omega$はそれ以外の境界を示す。

### 2.2 停留条件

本研究では，式(1)に示した評価関数の最小化問題を解くことにより鉄筋周りの座標値を推定することとなる。この評価関数には，計算値が含まれていることから，式(2)に示す状態方程式および式(3)～式(6)に示す初期条件および境界条件を拘束条件とした拘束付きの最小化問題に帰着されることとなる。拘束条件付きの最小化問題に対して随伴変数$\lambda$を導入すると，式(1)に示す評価関数は状態方程式を用いることにより式(7)のように拡張することができる。

$$J^*=J+\int_{t_0}^{t_f}\int_{\Omega}\lambda\left(\ddot{u}+\eta\dot{u}-c^2u_{,ii}\right)d\Omega dt \tag{7}$$

拡張評価関数$J^*$は$u$の関数であり，それは時間$t$の関数でもあることから，汎関数であることがわかる。汎関数の最小化問題を議論するに当たり停留条件の導

キーワード　電磁波レーダー法，最適化理論，鉄筋径，かぶり

連絡先　〒112- 8551 東京都文京区春日 1-13-27　中央大学大学院　理工学研究科土木工学専攻 TEL 03-3817-1892　E-mail：wanghuijuan@civil.chuo-u.ac.jp

出を行う。停留条件は拡張評価関数 $J^*$ の第一変分を計算することで導くことができ，拡張評価関数 $J^*$ の第一変分は式(8)のようになる。

$$\begin{aligned}\delta J^* &= \frac{\partial J^*}{\partial u}\delta u + \frac{\partial J^*}{\partial \lambda}\delta\lambda \\ &= \int_{t_0}^{t_f}\int_{\Omega}\left(u - u_{obs.}\right)Q\delta u d\Omega dt \\ &+ \int_{t_0}^{t_f}\int_{\Omega}\lambda\left(\delta\ddot{u} + \eta\delta\dot{u} - c^2 u_{,ii}\right)d\Omega dt \\ &+ \int_{t_0}^{t_f}\int_{\Omega}\delta\lambda\left(\ddot{u} + \eta\dot{u} - c^2 u_{,ii}\right)d\Omega dt\end{aligned} \tag{8}$$

式(8)に対してグリーン・ガウスの積分定理を適用して整理すると，式(9)で表すことができる

$$\begin{aligned}\delta J^* &= \int_{t_0}^{t_f}\int_{\Omega}\delta\lambda\left(\ddot{u} + \eta\dot{u} - c^2\delta u_{,ii}\right)d\Omega dt \\ &+ \int_{t_0}^{t_f}\int_{\Omega}\left\{\ddot{\lambda} - \lambda\eta - c^2\lambda_{ii} + \left(u - u_{obs.}\right)Q\right\}\delta u d\Omega dt \\ &+ \int_{\Omega}\left\{\lambda\left(t_f\right)\delta\dot{u}\left(t_f\right) - \lambda\left(t_0\right)\delta\dot{u}\left(t_0\right)\right\}d\Omega \\ &- \int_{\Omega}\left\{\dot{\lambda}\left(t_f\right)\delta u\left(t_f\right) - \dot{\lambda}\left(t_0\right)\delta u\left(t_0\right)\right\}d\Omega \\ &+ \int_{\Omega}\left\{\lambda\left(t_f\right)\eta\delta u\left(t_f\right) - \lambda\left(t_0\right)\eta\delta u\left(t_0\right)\right\}d\Omega \\ &- \int_{t_0}^{t_f}\int_{\Gamma_1+\Gamma_2+\Gamma_c}\lambda c^2\delta u_{,i}n_i d\Gamma_2 dt \\ &+ \int_{t_0}^{t_f}\int_{\Gamma_1+\Gamma_2+\Gamma_c}\lambda_{,i}c^2\delta u n_i d\Gamma_2 dt\end{aligned} \tag{9}$$

拡張評価関数に含まれる各条件は停留条件のため，最終的に式(9)に示す拡張評価関数 $J^*$ の第一変分 $\delta J^*$ がゼロとなる。式(9)において右辺第一項は状態方程式を示しており，右辺第二項は随伴変数 $\lambda$ により構成される随伴方程式であり式(10)で表される。そして，式(3)式(4)に示す初期条件および式(5)式(6)に示す境界条件を考慮すると，状態方程式および随伴方程式を解く際に必要とされる計算条件は式(11)～式(13)のようになる。

$$\ddot{\lambda} - \dot{\lambda}\eta - c^2\lambda_{,ii} + \left(u - u_{obs.}\right)Q = 0 \tag{10}$$

$$\lambda = 0 \quad at \quad t = t_f \quad in \quad \Omega \tag{11}$$

$$\dot{\lambda} = 0 \quad at \quad t = t_f \quad in \quad \Omega \tag{12}$$

$$c^2\delta u_{,i}n_i = 0 \qquad on \qquad \Gamma_2 \quad and \quad \Gamma_c \tag{13}$$

ここで，式(10)に示した随伴方程式は式(11)と式(12)で示した終端条件が与えられているため，終端から初期に向かって逆時間方向に解くことになる。

本研究においては，境界 $\Gamma_c$ における座標値のみを設計変数としており，それ以外の境界においては座標値を規定するため $\delta x_i$ がセロとなる。また，鉄筋の座標値は時間方向に対して不変であるため，拡張評価関数 $J^*$ の座標値 $x_i$ に対する勾配は，全時間領域において積分したものである。したがって，式(14)に示すように拡張評価関数 $J^*$ の座標値 $x_i$ に対する勾配の式が導出されこの勾配をゼロとするような繰り返し計算により鉄筋の座標値が更新されることとなる。

$$\frac{\partial J^*}{\partial x_i} = \int_{t_0}^{t_f}(c^2\lambda_{,i}n_i)u_{,i}dt \tag{14}$$

### 2.3 拡張評価関数の最小化手法

拡張評価関数の最小化手法には，Sakawa・Shindo らにより提案された勾配法 [1]を適用する。すなわち，拡張評価関数 $J^*$ にペナルティ項を付加した修正拡張評価関数を導入する。境界 $\Gamma_c$ における未知となる座標の変化量が繰り返し計算過程においてほぼゼロとなるまで計算した際,無視することができる項となっている。したがって,拡張評価関数 $J^*$ の座標 $x_i$ に対する勾配をゼロとするような繰り返す計算のアルゴリズムを構築する際に，式(15)に示す修正拡張評価関数 $K$ を導入する。

$$K^{(l)} = J^{*(l)} + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}\int_{\Gamma_1}XW^{(l)}Xd\Gamma dt \tag{15}$$

ここで，$(l)$ は繰り返し計算回数，$W$ は重みパラメータ， $X$ は座標の変化量 $X = x_i^{(l+1)} - x_i^{(l)}$ である。

式（15）に示す修正拡張評価関数 $K$ を最小化するには，停留条件を導出する必要がある。拡張評価関数 $J^*$ と同じように修正拡張評価関数 $K$ の第一変分を計算することで次のように停留条件を導くことができる。

$$\begin{aligned}\delta K^{(l)} &= \int_{t_0}^{t_f}\int_{\Gamma_c}\frac{\partial K^{(l)}}{\partial u^{(l)}}\frac{\partial u^{(l)}}{\partial x_i^{(l)}}\delta x_i^{(l)}d\Gamma dt \\ &= \int_{t_0}^{t_f}\int_{\Gamma_c}(\frac{\partial J^{*(l)}}{\partial u^{(l)}}\frac{\partial u^{(l)}}{\partial x_i^{(l)}} + XW^{(l)})\delta x_i^{(l)}d\Gamma dt = 0\end{aligned} \tag{16}$$

最終的に,鉄筋周りの境界 $\Gamma c$ における座標 $x_i$ の更新式は，式(17)のように表すことができる。

$$X^{(l+1)} = X^{(l)} - \frac{1}{W^{(l)}}\frac{\partial J^{*(l)}}{\partial u^{(l)}}\frac{\partial u^{(l)}}{\partial x_i^{(l)}} \quad on \quad \Gamma_c \tag{17}$$

式(17)に示す座標 $x_i$ の更新式を用いることで繰り返し計算アルゴリズムは以下のように示すことができる。

**Step1** 境界 $\Gamma_c$ 上における鉄筋周りの初期座標値 $x_i^{(l)}$ および収束判定定数 $\varepsilon$ を設定する。

**Step2** 波動状態方程式より $u^{(l)}$ を算定し,評価関数 $J^{(l)}$ を計算する。

**Step3** 随伴方程式より $\lambda^{(l)}$ を算定し，拡張評価関数 $J^{*(l)}$ の座標値 $x_i^{(l)}$ に対する勾配 $\partial J^{*(l)} / \partial x_i^{(l)}$ を計算する。

**Step4** 境界 $\Gamma_c$ 上において式(20)に基づき座標値を更新し $x_i^{(l+1)}$ とする。

**Step5** 収束判定を行う。

If $\left|J^{(l)}\right| < \varepsilon$ then Stop　else　go to Step 6

**Step6** 状態方程式より $u^{(l+1)}$ を算定し，評価関数 $J^{(l+1)}$ を計算する。

**Step7** 重みパラメータ $W^{(l)}$ の更新を行う。

If $J^{(l+1)} \le J^{(l)}$ then $W^{(l+1)} = 2.0W^{(l)}$ goto Step 3

else　$W^{(l+1)} = 0.9W^{(l)}$　goto Step 4

### 2.4 状態方程式と随伴方程式の離散化

状態方程式および随伴方程式に対して，有限要素法を適用する際，空間方向の離散化にはガラーキン法を適用すると次式となる

$$M\ddot{u} + \eta M\dot{u} + c^2 H_{,ii} u = F \tag{18}$$

$$M\ddot{\lambda} - \eta M\dot{\lambda} + c^2 H_{,ji}\lambda + P = S \tag{19}$$

$$M = \int_{\Omega_e} \Phi\Phi^T d\Omega \qquad H_{,ii} = \int_{\Omega_e} \Phi_{,i}\Phi_{,i}^{\ T} d\Omega$$

$$F = \int_{\Gamma_2+\Gamma_c} \Phi c^2 u_{,i} n_i d\Gamma_2 + \Gamma_c \qquad S = \int_{\Gamma_c} \Phi c^2 \lambda_{,i} n_i d\Gamma_c$$

$$P = \int_{\Omega_e} \Phi Q(u - u_{obj.})d\Omega \tag{20}$$

そして，式(18)および式(19)を時間方向に差分法を適用して，離散化すると式(21)および式(22)になる。

$$u^{n+1} = \frac{F^n \Delta t^2 M^{-1} + 2u^n - c^2 H_{,ii}\Delta t^2 M^{-1} u^n + (0.5\Delta t\eta - 1)u^{n-1}}{0.5\Delta t\eta + 1} \tag{21}$$

$$\lambda^{n-1} = \frac{(S^n - P^n)\Delta t^2 M^{-1} + 2\lambda^n - c^2 H_{,ii}\Delta t^2 M^{-1}\lambda^n + (0.5\Delta t - 1)\lambda^{n+1}}{0.5\Delta t\eta + 1} \tag{22}$$

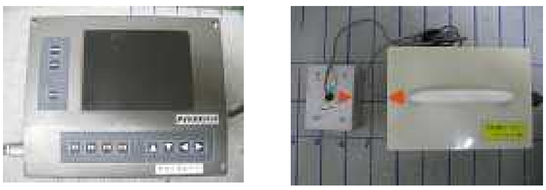
ここに $n$ は時間ステップを表す。

## 3. 鉄筋径とかぶりの予測

### 3.1 実験概要

#### (1) 電磁波レーダ装置と試験体

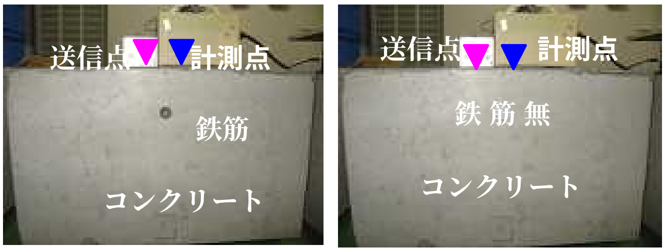
本研究で使用した電磁波レーダ装置は図－2 に示し，中心周波数 1GHz のパルス方式で，送受信アンテナが分離型となっている。



装置本体　　送受信アンテナ

図－2 電磁波レーダ装置

鉄筋コンクリート試験体は図－3 に示すように 300mm×300mm×500mm の形状寸法であり，かぶり 60mm の位置に直径 25mm の丸鋼が設置されている。なおコンクリートの配合は, w/c=0.45, s/c=2.5 である。送信アンテナと受信アンテナは同図に示すように，鉄筋を中心として左右 36mm の位置に設置した。

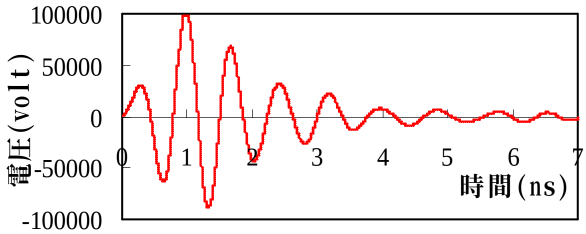



(a)有筋試験体　　(b)無筋試験体

図－3 試験体への送受信アンテナの設置概要

#### (2)コンクリートへの入射波形

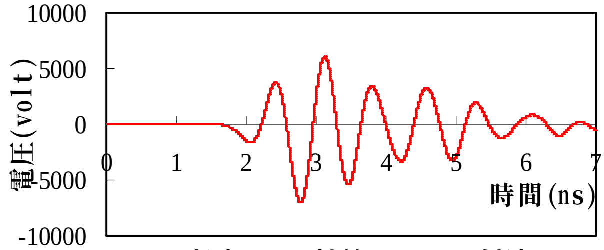
コンクリートへの入射波は，図－4 に示すように，周波数 1GHz 電磁波レーダ装置のゲインを 55.5 と設定した状態である。




図－4 コンクリートへの入力波形

#### (3)鉄筋からの反射波形の抽出

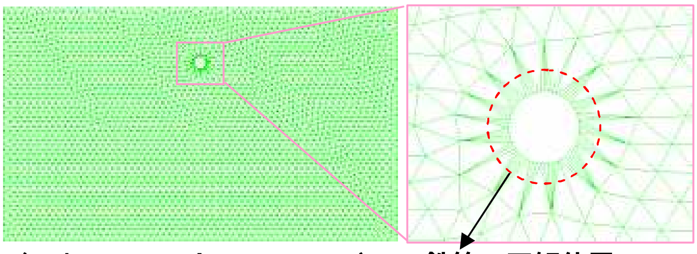
図－3 に示した受信アンテナでは，鉄筋からの反射波(重複反射も含む)に加えて送信アンテナからコンクリート表面を直接伝搬した波(以下,直達波と称す)も受信することとなる。本来であれば，受信した全波形を観測値として前章で構築した理論に適用すべきであるが，直達波の振幅は鉄筋からの反射波に比べて大きいため，鉄筋径とかぶりの予測においては直達波が支配的となった結果になる。したがって，予測精度の向上のためには，全波のうち鉄筋からの反射波成分のみを抽出する必要がある。そこで，本研究では，鉄筋を設置せずに図－3(b)に示した同じ形状寸法のコンクリート試験体に鉄筋なしで直達波を計測し，図－3(a)の結果からその成分を除去したものを反射波形とした。なお，反射波形は図－5 に示す通りである。




図－5 計測された鉄筋からの反射波

### 3.2 予測値と精度の検討

2章で構築したモデルに図－4 に示すコンクリートへの入力波と図－5 に示す観測波を適用し，鉄筋径とかぶりの推定を実施する。解析における鉄筋に関する初期条件は図－6 に示すように径が 15㎜，かぶりが 65㎜ である。なお,解析条件は表－1 に示す通りである。



(nodes=3210 elements=6162)　　鉄筋の正解位置

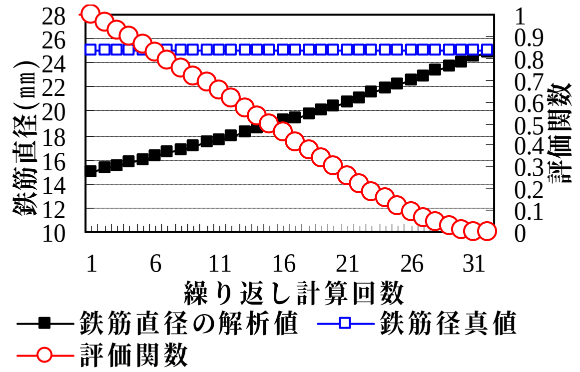
(a)解析メッシュ　　(b)局所拡大図

図－6 鉄筋に関する初期条件

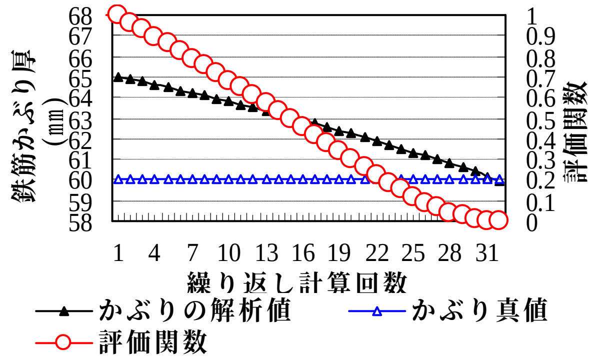
表－1　解析条件

| | |
|---|---|
| 時間増分 Δt(ns) | 0.001ns |
| 時間ステップ数 | 7001 |
| 入力波周期数(rad/s) | 1G |
| 初期重みパラメータ W(0) | 10^9 |
| 比誘電率 | 13 |
| 光速度(m/s) | 3×10^8 |
| 収束判定定数 ε | 10^-3 |

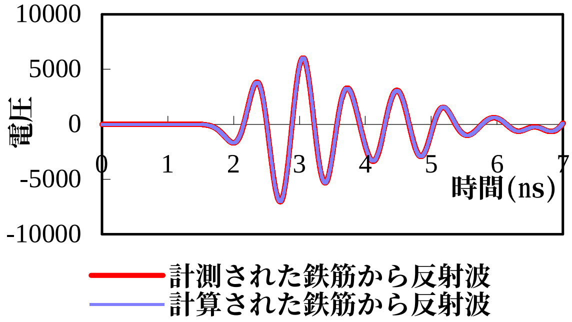
図－7 と図－8 は, それぞれ繰り返し計算に応じた鉄筋径およびかぶりの推定値であり，各図中には評価関数も表している。図－7 と図－8 示すように評価関数は繰り返し計算によりほぼゼロとなっており，鉄筋径とかぶりの解析値が真値に近づいていることがわかった。評価関数が最小となった時点における鉄筋径およびかぶりは，それぞれ 24.9mm および 60.0mm であり，真値とほぼ一致している。計算波は図－9 に示すように観測波と良好な一致を示している。




図－7 鉄筋直径の解析値の変化と評価関数




図－8 鉄筋かぶりの解析値の変化と評価関数




図－9 観測波と計測波の比較

### 4．おわりに

本検討では，最適化理論と有限要素法を組み合わせたシミュレーションにより鉄筋コンクリート内部における鉄筋径およびかぶりに関する推定計算を行った。メッシュの細かさおよび時間増分の設定を適切に行った場合，鉄筋径とかぶりの推定精度は真値と比較したところ 96%以上となった。本稿では，未知パラメータは鉄筋径とかぶりを対象としており，コンクリート比誘電率は既知であるものとし検討を行った。今後は，鉄筋径、かぶりの他に，コンクリートの比誘電率を未知パラメータに加え，３種のパラメータを同時に推定する手法について検討を行う予定である.

### 参考文献

1) Y.Sakawa and Y.Shindo : On Global Convergence of An Algorithm for Optimal Control ,IEEE Trans.on Automatic Control,Vol.ac-25,No.6,pp.1149-1153,1980.