安定化有限要素法による高潮解析手法の構築

中央大学 学生員 ○ 市川 浩司
中央大学大学院 学生員 利根川 大介
中央大学 正会員 樫山 和男

1. はじめに

2004 年 8 月に発生した台風 16 号による高潮により，防波堤等の港湾施設，海岸護岸が被害を受けるとともに，浸水による人的被害も発生した．しかし，自然災害に対する脅威は薄れることはなく，正確かつ的確な災害・防災情報は地域住民の防災意識を高め，災害時の防災活動を迅速かつ円滑に行うために必要となる．特に近年は高潮災害対策において高精度な数値シミュレーションによる防災対策の必要性が高まってきている．また高潮解析では複雑な自然形状を対象とするため，任意形状への適合性に優れた有限要素法は有効な手法であると考えられる．既往の研究において，唐木田，樫山らによって安定化有限要素法による高潮解析手法の構築が行われている．しかしながら陽解法に基づく方法であり，陰解法での検討は行われていない．

そこで，本論文は安定化有限要素法を用いた陰解法による高潮解析手法の提案を行い，陽解法との解析精度および計算効率の比較を行うものである．また，安定化パラメータの検討を行った．数値解析例として東京湾高潮解析を取り上げ，本解析手法の有効性の検討を行った．

2. 数値解析手法

(1) 支配方程式

支配方程式には，以下に示す保存型浅水長波方程式を用いる．

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t}+\mathbf{A}_i\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{x}_i}-\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_i}\left(\mathbf{N}_{ij}\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{x}_j}\right)+\mathbf{R}+\mathbf{GU}=0 \quad (1)$$

$$\mathbf{U}=\begin{bmatrix} H \\ uH \\ vH \end{bmatrix},\ \mathbf{R}=\begin{bmatrix} 0 \\ c^2\frac{\partial(z-\zeta_0)}{\partial x}-\frac{\rho_a C_D\sqrt{w_x^2+w_y^2}w_x}{\rho H^{1/3}} \\ c^2\frac{\partial(z-\zeta_0)}{\partial y}-\frac{\rho_a C_D\sqrt{w_x^2+w_y^2}w_y}{\rho H^{1/3}} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_1=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ c^2-v^2 & 2u & 0 \\ -uv & v & u \end{bmatrix},\ \mathbf{A}_2=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -uv & v & u \\ c^2-v^2 & 0 & 2v \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{N}_{11}=\nu_e\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2u & 2 & 0 \\ -v & 0 & 1 \end{bmatrix},\ \mathbf{N}_{12}=\nu_e\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -u & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{N}_{21}=\nu_e\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -v & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ \mathbf{N}_{22}=\nu_e\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -u & 1 & 0 \\ -2v & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{U_*}{H} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{U_*}{H} \end{bmatrix},\ U_*=\frac{gn^2\sqrt{u^2+v^2}}{H^{1/3}}$$

ここで，$H(=h+\zeta)$ は全水深，h は初期水深，ζ は水位変動量，u，v は x，y 方向の断面平均流速，g は重力加速度，$c(=\sqrt{gH})$ は波速，ν_e は渦動粘性係数，n はマニングの粗度係数である．また，ρ，ρ_a は水の密度，空気の密度である．ζ_0 は気圧低下に伴う水位変動量，C_D は抗力係数であり以下の本多・光易の式[2] を用いる．

$$C_D=\begin{cases}(1.290-0.024||\mathbf{w}||)\times 10^{-3} & (||\mathbf{w}||\le 8) \\ (0.581+0.063||\mathbf{w}||)\times 10^{-3} & (||\mathbf{w}||>8)\end{cases} \quad (2)$$

(2) 安定化有限要素法[1]

支配方程式 (1) に対して, 空間方向の離散化として SUPG 法に基づく安定化有限要素法を適用すると，以下の重み付き残差方程式が得られる．

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \mathbf{U}^*\cdot\Big(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t}+\mathbf{A}_i\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{x}_i}+\mathbf{GU}+\mathbf{R}\Big)d\Omega \\ &\qquad+\int_\Omega\left(\frac{\partial \mathbf{U}^*}{\partial \mathbf{x}_i}\right)\cdot\left(\mathbf{N}_{ij}\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{x}_j}\right)d\Omega \\ &+\sum_{e=1}^{n_{el}}\int_{\Omega_e}\tau(\mathbf{A}_j)^T\Big(\frac{\partial \mathbf{U}^*}{\partial \mathbf{x}_j}\Big) \\ &\cdot\left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t}+\mathbf{A}_i\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{x}_i}+\mathbf{GU}-\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_i}\left(\mathbf{N}_{ij}\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{x}_j}\right)+\mathbf{R}\right)d\Omega \\ &+\sum_{e=1}^{n_{el}}\int_{\Omega_e}\delta\Big(\frac{\partial \mathbf{U}^*}{\partial \mathbf{x}_i}\Big)\cdot\Big(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{x}_i}\Big)d\Omega=0 \quad (3)\end{aligned}$$

式 (3) の左辺第 1，2 項は Galerkin 項であり，第 3 項の要素ごとの積分の総和項は SUPG 項，第 4 項の要素ごとの積分の総和は衝撃捕捉項である．なお，$\mathbf{U}^*$ は重み関数，τ および δ は安定化パラメータである．一方，時間方向の離散化には，2 次精度を有する Crank-Nicolson 法を用いた．また，連立一次方程式の解法には，Element-By-Element Bi-CGSTAB 法を用いた．

(3) 安定化パラメータ[4]

式 (3) 中の衝撃捕捉項は水位不連続面における数値不安定性を回避するものであり, 安定化パラメータ δ を式 (4) を基本形とし，以下の 2 ケース（Case1，Case2）で比較する．

$$\delta=\tau_{SHOC}\left(||\mathbf{u}_{int}||\right)^2 \quad (4)$$

Case1：

$$\tau_{SHOC}=\Big(\sum_{\alpha=1}^{n_{en}}\Big|\mathbf{u}\cdot\nabla N_\alpha\Big|\Big)^{-1}$$

$$||\mathbf{u}_{int}||=||\mathbf{u}||$$

Case1 は Tezduyar らが非圧縮性粘性流れ解析に対して提案した安定化パラメータで，流速に依存するものである．

KeyWords： 安定化有限要素法，高潮解析，浅水長波方程式
連絡先： 〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27 E-mail d35237@educ.kc.chuo-u.ac.jp

Case2：

$$\tau_{SHOC} = \Big(\sum_{\alpha=1}^{n_{en}}(c|\mathbf{j}\cdot\nabla N_\alpha| + |\mathbf{u}\cdot\nabla N_\alpha|)\Big)^{-1}\Big(\frac{|\nabla^2 H^e|}{|\nabla^2 H^e|_{max}}\Big)$$

$$\mathbf{j} = \frac{\nabla H}{||\nabla H||}$$

$$||\mathbf{u}_{int}|| = \sqrt{||\mathbf{u}||^2 + c^2}$$

Case2 は川合，樫山らが浅水長波流れ解析に対して提案した安定化パラメータである．Case2 の特徴としては二つ挙げられる．一つは浅水長波流れの代表的速度である波速を考慮に加えたことである．もう一つは，水面形状の二階微分を考慮に加えたことである．この理由としては，水位の不連続面は二階微分値が大きくなるので，それを重みとして考慮することにより，安定化を施すことが可能となるからである．ここに，N_α は形状関数である．また，SUPG 項は移流項の卓越を抑制するものであり，式 (3) の τ は以下のように定義する．なお，τ は各ケース統一とする．

$$\tau = \Big(\frac{1}{(\tau_{SUGN1})^2} + \frac{1}{(\tau_{SUGN2})^2}\Big)^{-\frac{1}{2}} \tag{5}$$

$$\tau_{SUGN1} = \Big(\sum_{a=1}^{n_{en}}(c \mid \mathbf{j}\cdot\nabla N_a \mid + \mid \mathbf{u}\cdot\nabla N_a \mid)\Big)^{-1}$$

$$\tau_{SUGN2} = \frac{\Delta t}{2} \quad , \quad \mathbf{j} = \frac{\nabla H}{\parallel \nabla H \parallel}$$

ここに，Δt は微小時間増分量である．

3.　台風モデル[5)]

(1)　Myers の分布による気圧

台風の気圧分布は，次式に示す Myers の式で与えた．

$$P(r) = P_c + \Delta P \mathrm{exp}\Big(-\frac{r_0}{r}\Big) \tag{6}$$

ここに，$P(r)$ は台風中心から距離 r だけ離れた地点での気圧，P_c は台風の中心気圧，ΔP は気圧深度，r_0 は台風の半径である．このような気圧分布の下で，傾度風速 U_{gr} は次式で与えられる．

$$U_{gr} = -\frac{rf}{2} + \sqrt{\Big(\frac{rf}{2}\Big)^2 + \frac{\Delta P}{\rho_a}\frac{r_0}{r}\mathrm{exp}\Big(-\frac{r_0}{r}\Big)} \tag{7}$$

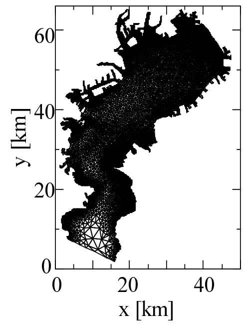
なお，f はコリオリ係数，ρ_a は空気の密度である．ここで，傾度風および台風の移動に伴う海面付近の風速はそれぞれ次式のようになる．

$$u_1 = C_1(x)U_{gr} \tag{8}$$

$$u_2 = C_2 V_t \mathrm{exp}(-\beta r) \tag{9}$$

ここに，C_2 は定数であり 0.7 とした．V_t は台風進行速度であり，係数値 β は $\beta = \pi/(500\times1000)$ を用いた．u_1 は U_{gr} に比べ 30°内側に傾くものとし，風速 $\mathbf{w}$ は式 (8),(9) のベクトル和として決定される．また，式 (1) の ζ_0 は次式で与える．

$$\zeta_0 = 0.991(1,013 - P(r)) \times 10^{-2} \tag{10}$$



図－１　有限要素分割図

(2)　超傾度風を考慮するための風速低減係数

台風の目の外側では，目の 3 次元構造に起因して，自由大気の風速 U_{gr} を超える海上風が生じており超傾度風と呼ばれている．ここでは藤井・光田によるモデル[3)] を導入した．

$$C_1(x) = C_1(\infty) + [C_1(x_p) - C_1(\infty)]\Big(\frac{x}{x_p}\Big)^{k-1}$$
$$\times \mathrm{exp}\Big(\Big(1-\frac{1}{k}\Big)\Big[1-\Big(\frac{x}{x_p}\Big)\Big]\Big) \tag{11}$$

ここに，$x = r/r_0$，$x_p = 0.5$，$k = 2.5$，$C_1(\infty) = 2/3$，$C_1(x_p) = 1.2$ である．

4.　数値解析例

本解析手法の有効性を検討するため，1985 年台風 6 号[6)] により引き起こされた東京湾での高潮を取り上げる．有限要素分割図を**図-1** に示す．総節点数 10,693，総要素数 19,493 である．台風経路は 3 時間ごとの台風中心位置で与え, その間を 3 次スプライン補間を用いて与えた．海水の密度 ρ_w，空気の密度 ρ_a，コリオリ係数 f および Manning の粗度係数 n は, それぞれ $1.03[\mathrm{g/cm^3}]$, $1.22\times10^{-3}[\mathrm{g/cm^3}]$, $8.3304\times10^{-5}[1/\mathrm{s}^2]$，0.025 である．なお境界条件として，開境界においては潮汐を入射波条件として与えた．解析結果は講演時に示す.

5.　おわりに

本論文では陰解法に基づく安定化有限要素法を用いて東京湾高潮解析を行い，陽解法と解析精度および計算効率の比較を行った．また，安定化パラメータの検討を行った．

参考文献

1) T.E.Tezdnyar：Stabilized finite element formulations for incompressible flow computations, *Advance in apploed Mechanics*，28,pp,1-44,1991.
2) H.Mitsuyasu and T.Honda：'The High Frequency Spectrum of Wind-generated Waves'，*J.Oceanog.Soc.Japan*，30，pp,185-198，1974
3) 藤井健，光田寧：台風の確率モデルの作成とそれによる強風のシミュレーション，京都大学防災研究所年報，29，B-1，pp,229-239，1986
4) 川合伸宜，田中聖三，樫山和男：浅水長波流れ解析のための安定化有限要素法における安定化項の検討，土木学会第 61 回年次学術講演会 (CD-ROM)，2006
5) 唐木田泰久，小林義典，岡田岳，樫山和男：安定化有限要素法による高潮氾濫解析手法の提案，第 31 回土木学会関東支部技術研究発表会 (CD-ROM)，2004
6) 小西達夫，上平悦郎，瀬河孝博：台風 8506 号による高潮と副振動，天気，33，No6，pp,263-270，1986