動的二次元弾性解析における陽解法と陰解法の比較の検討

中央大学　学生員　○小久保　翔太
中央大学大学院　学生員　岩田　暁
中央大学大学院　学生員　寺沢　英之
中央大学　正会員　樫山　和男

1. はじめに

近年, 地震, 津波, 台風などの自然災害により, 構造物の崩壊や倒壊が発生し, 深刻な問題となっている．そのため, 数値シミュレーションにより構造物の変形や破壊挙動を把握することは防災上の観点から重要である．このような現象は動的問題であり, 数値シミュレーションを行う場合には, 時間の離散化手法として陽解法または陰解法が用いられる．

陽解法の長所は, 1 ステップあたりの計算時間が短いことと, 記憶容量が少なく済むため大規模な計算に対して非常に有利であることが挙げられる．しかしながら, 安定条件が課せられるため微小時間増分量 Δt を大きく取ることができないという短所がある．一方, 陰解法は陽解法とは逆の関係になる．すなわち, 無条件安定となるため微小時間増分量 Δt を大きく取ることができる長所があり, 短所は連立一次方程式を直接解くため, 記憶容量を多く必要とすることである．

そこで本研究では, 構造の動的解析において上記の点を検証すべく, 数値解析例として単純片持ち梁における自由振動の二次元弾性解析を取り上げ, 微小時間増分量 Δt を変化させた際の数値解析結果より, 陽解法と陰解法の比較・検討を行った．

2. 数値解析手法

(1) 基礎方程式

2 次元弾性体の動的問題に対する力のつりあい方程式 (1), 変位 - ひずみ関係式 (2), 応力 - ひずみ関係式 (3) はそれぞれ以下の式で示される．

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + b_i - \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = 0 \tag{1}$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \tag{2}$$

$$\sigma_{ij} = D_{ijkl}\epsilon_{kl} \tag{3}$$

ここで, σ_{ij} は Cauchy 応力テンソル, b_i は物体力, u_i は変位ベクトルを表す．これらの式より, 仮想仕事の原理式は次のようになる．

$$\int_V D_{ijkl}\frac{\partial u_k}{\partial x_l}\frac{\partial {u_i}^*}{\partial x_j}dV + \int_V \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}u_i^* dV = \int_{S_t} t_i {u_i}^* dS \tag{4}$$

式 (4) より, 最終的に以下のような減衰項を無視した空間に対して離散化された有限要素方程式が導かれる．

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{F} \tag{5}$$

ここで, $\mathbf{M}$ は質量マトリクス, $\mathbf{K}$ は剛性マトリクス, $\mathbf{F}$ は外力ベクトル表す．

(2) 陽解法 (中心差分法)

時間方向の離散化に中心差分法を用いると, 速度と加速度は以下のように示される．

- 速度

$$\dot{u}^n = \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} \tag{6}$$

- 加速度

$$\ddot{u}^n = \frac{u^{n+1} - 2u^n + u^{n-1}}{\Delta t^2} \tag{7}$$

式 (6), 式 (7) を全体系の有限要素方程式 (5) に代入し, 整理すると次のようになる．

$$\frac{1}{\Delta t^2}\mathbf{M}\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{F}^n - \left(\mathbf{K} - \frac{2}{\Delta t^2}\mathbf{M}\right)\mathbf{u}^n - \frac{1}{\Delta t^2}\mathbf{M}\mathbf{u}^{n-1}$$

また, 陽解法の安定条件は次式で与えられる．

$$\Delta t \leq \frac{h_{\min}}{c} \tag{8}$$

ここで, c は応力の伝播速度, h_{min} は解析対象の最小要素幅である．

(3) 陰解法 (Newmark′sβ 法)

線形加速度法を拡張した方法に Newmark′sβ 法があり, 変位と速度の関係を次のように仮定している．

- 変位

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^n + \Delta t\dot{\mathbf{u}}^n + \Delta t^2\left(\frac{1}{2} - \beta\right)\ddot{\mathbf{u}}^n + \Delta t^2\beta\ddot{\mathbf{u}}^{n+1} \tag{9}$$

- 速度

$$\dot{\mathbf{u}}^{n+1} = \dot{\mathbf{u}}^n + \Delta t\,(1-\gamma)\,\ddot{\mathbf{u}}^n + \Delta t\gamma\ddot{\mathbf{u}}^{n+1} \tag{10}$$

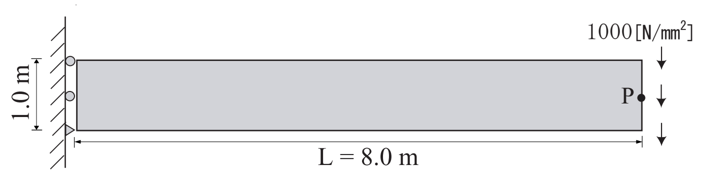
ここで, γ と β は近似の特徴を定めるためのパラメータであり, 計算の精度や安定性を左右するものである．このパラメータ γ と β の制約[2) 3)]には様々な考えがある．本研究では $\gamma = 0.6$, $\beta = 0.3025$ を用いる．

3. 数値解析例

数値解析例として, **図-1** に示すような片持ち梁による自由振動を考える．静的な状態において外力 1000N/mm^2 を与えることによって梁に初期たわみを与えて, 除荷した後の点 P における変位応答の厳密解について陽解法, 陰解法による数値解の比較を微小時間増分量 Δt を変化させて行った．

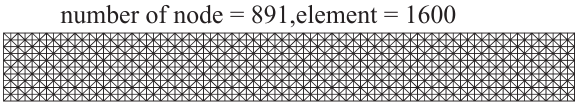
図-2 に比較に用いた要素分割図を示す．**図-3** に陽解法, **図-4** に陰解法によって得られた, 点 P における変位応答の数値解析解の拡大図を示す. なお数値解析上, 発散することなく計算できる最大の微小時間増分量を $\Delta t_{\max}$ と定義し

KeyWords：　動的二次元弾性解析, 陽解法, 陰解法
連絡先：　〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27　E-mail: d35223@educ.kc.chuo-u.ac.jp



ヤング率	$E = 2.1 \times 10^{11}$ [N/m^2]
ポアソン比	$\nu = 0.30$
密度	$\rho = 7860$ [kg/m^3]
荷重	$P = 1000$ [N]

図－１ 解析モデル



図－２ 要素分割図

た．両図より，陰解法では数値解析解に大きな振動は見られなかったが，陽解法では発散直前の Δt_{max} において数値解析解に数値不安定性に起因する振動が見られることがわかる．

また **図-5** に変位応答の厳密解と陽解法と陰解法の数値解析解の拡大図を示す．図より，陽解法で安定な微小時間増分量 Δt を用いた場合には，両手法とも同程度の精度であることがわかる．**図-6** に要素分割数と記憶容量の関係を示し，**図-7** に Δt ごとの要素分割数と計算時間の関係を示す．**図-6** より陰解法に比べ，陽解法のほうが記憶容量が少ないことが確認でき，**図-7** より同じ Δt を用いた場合には，陽解法のほうが計算時間の点で有利な結果となることがわかる．しかし，陽解法は陰解法に比べて Δt を大きくとれないため，計算時間の点では必ずしも有利にはならない．

4. おわりに

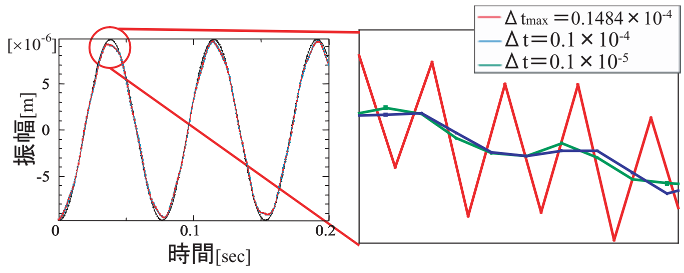
本研究では，数値解析例として単純片持ち梁における自由振動の二次元弾性解析を取り上げ，陽解法と陰解法の両手法について比較・検討を行い，以下の結論を得た．

- 陽解法は条件付安定であるため，Δt_{max} において数値解析解が不安定になっているが，陰解法は無条件安定であるため，Δt を大きくとることが可能である．
- 両手法とも安定な Δt の範囲では，同等の解析精度となることが確認された．
- 陽解法は陰解法に比べて記憶容量の点では有利となる．ただし，条件付安定であるため，計算時間の点では必ずしも有利にならない．

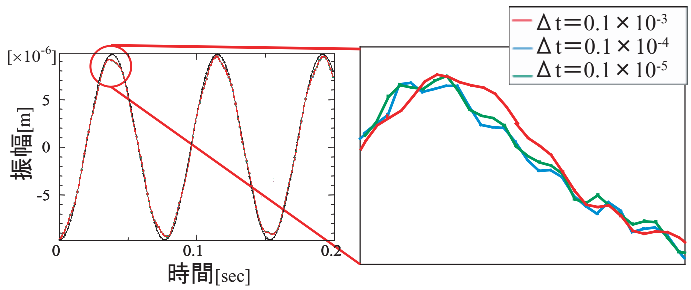
今後は，衝撃問題解析を行い，陽解法と陰解法の比較・検討を行う予定である．

参考文献

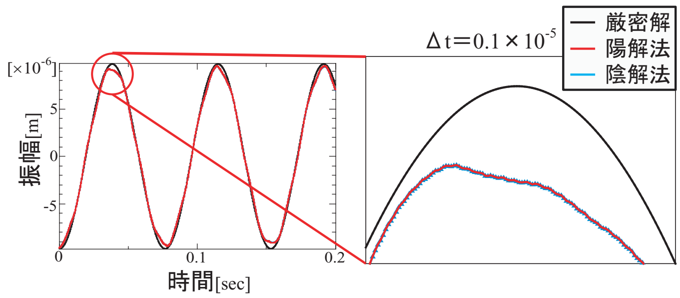
1) 日本計算工学会流れの有限要素法研究委員会 編：続・有限要素法による流れのシミュレーション，シュプリンガー・ジャパン株式会社, 2008 年
2) 竹内則雄，樫山和男，寺田賢二郎：計算力学　有限要素法の基礎，森北出版株式会社, 2003 年
3) 久田，野口：非線形有限要素法の基礎と応用，丸善株式会社, 1995 年



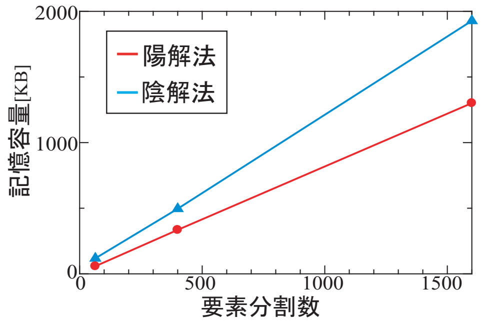
図－３ 各 Δt での変位応答の数値解析解 (陽解法)



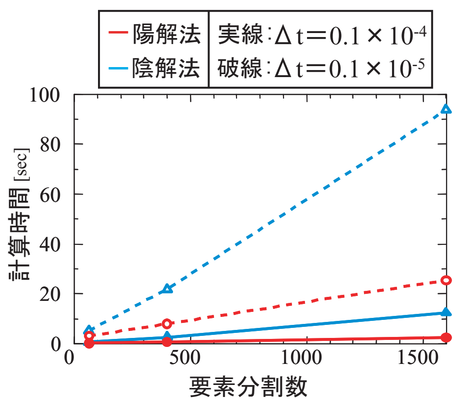
図－４ 各 Δt での変位応答の数値解析解 (陰解法)



図－５ 厳密解と陽解法, 陰解法の数値解析解の比較



図－６ 要素分割数と記憶容量の関係



図－７ 要素分割数と計算時間の関係