斜張橋のプレストレス力決定に関する一計算法

ホーチミン市工科大学　　Dang Dang Tung
長岡技術科学大学　学生会員　○Mai Duc Khoi
長岡技術科学大学　正会員　　岩崎　英治

１．まえがき

既往の研究[1),2)]では，ケーブルと他構造との接合部を滑車のように扱うために，ケーブル張力が等しくなるような条件や，ケーブル張力の規定の方向成分が等しくなるような条件を，ラグランジュの未定係数法により，構造全体のエネルギー式に含めることで，ケーブル構造のある種の形状決定を行えることを示した．この方法により，形状決定と構造解析がシームレスに行え，様々な形式のケーブル系構造の解析が容易になる．

本研究では，この方法をさらに拡張して，構造内の特定の点の変位群が，規定の値になるか，または，規定値との残差が最小になるように，特定の位置でのケーブル張力(プレストレス力) 群を決定する方法を提案する．その上、土木技術者の中でよく用いられている汎用性の高いMidas/Civilソフトによる結果に比較し、本提案の応用性を示す.

２．ケーブル張力の決定法

構造の一例として，図１のような梁部材にケーブル部材が滑車を介して接続されている状態を考える．節点i, jなどの変位u_i, u_jが規定の値$\bar{u}_i, \bar{u}_j$ に等しくなるか，または，残差が最小になるように，滑車内を通っているケーブルの張力 などを決める方法を示す．なお，変位を規定する節点とケーブル張力を与える滑車は，同一節点になくても良いし，変位成分の数と張力を与える滑車の数が異なっていても良いものとする．

全体の平衡方程式は，次のように表される[1),2)].

$$\boldsymbol{KD} = \boldsymbol{F} \qquad (1)$$

$$\mathbf{D} = \begin{Bmatrix} \vdots \\ \bar{u}_i \\ \bar{u}_j \\ \bar{u}_k \\ \vdots \end{Bmatrix}, \quad \boldsymbol{F} = \begin{Bmatrix} \vdots \\ T_i \\ T_j \\ T_k \\ \vdots \end{Bmatrix} \qquad (2)$$

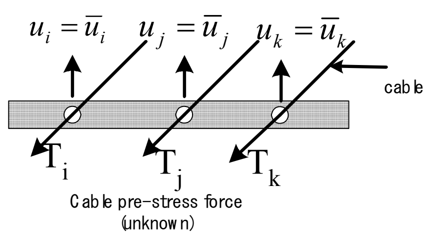


図１　プレストレス力

ここで， **D** は節点変位と滑車部でのすべり変位を含んだベクトル， **F** は節点力と滑車部でのすべり変位を起こさせる張力(プレストレス力) を含んだベクトルである．規定の変位が与えられた成分と，張力成分を明示的に表すと，次式のようになる．

この方程式は，変位ベクトル **D** と荷重ベクトル **F** に未知量と既知量が混在している．そこで，次のような方程式群を考える．

キーワード　　ケーブル，プレストレス，形状決定，滑車

連絡先　HoChiMinh University of Technology, 268 Ly Thuong Kiet Street, District 10, HoChiMinh city, Vietnam
ＴＥＬ (8408)38637003 E-mail：ddtung@hcmut.edu.vn or ddtungjp@yahoo.co.jp

$$\begin{aligned} \boldsymbol{KD}^{(0)} &= \boldsymbol{F}^{(0)} \\ &\vdots \\ \boldsymbol{KD}^{(i)} &= \boldsymbol{F}^{(i)} \\ \boldsymbol{KD}^{(j)} &= \boldsymbol{F}^{(j)} \\ \boldsymbol{KD}^{(k)} &= \boldsymbol{F}^{(k)} \\ &\vdots \end{aligned} \tag{3}$$

ここで，$\boldsymbol{F}^{(0)}$は未知のプレストレス力$\boldsymbol{T}_{(i)}, \boldsymbol{T}_{(j)}$ などをゼロとおいた荷重ベクトル，$\boldsymbol{F}^{(i)}$は$\boldsymbol{T}_{(i)}$ に相当する成分を'1'，他の成分を'0' とおいた荷重ベクトルである．これらの方程式の解$\boldsymbol{D}^{(0)}, \boldsymbol{D}^{(i)}\ldots$から，元の方程式の解は次のように表される．

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}^{(0)} + \cdots + T_i \mathbf{D}^{(i)} + T_j \mathbf{D}^{(j)} + T_k \mathbf{D}^{(k)} + \cdots \tag{4}$$

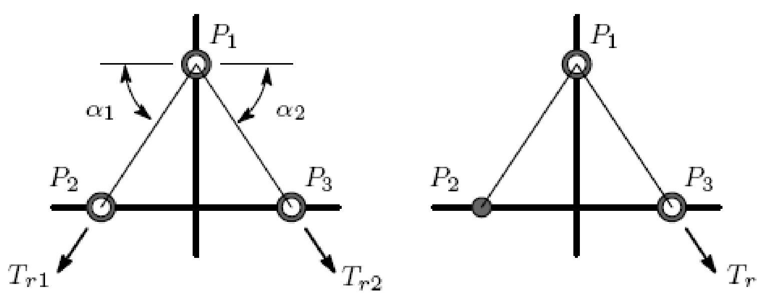
上式から，変位が規定されている成分に相当する式を取り出して，プレストレス力に関する方程式にまとめると，次式が得られる．

$$\begin{Bmatrix} \vdots \\ \bar{u}_i \\ \bar{u}_j \\ \bar{u}_k \\ \vdots \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \vdots \\ u_i^{(0)} \\ u_j^{(0)} \\ u_k^{(0)} \\ \vdots \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \cdots & u_i^{(i)} & u_i^{(j)} & u_i^{(k)} & \cdots \\ \cdots & u_j^{(i)} & u_j^{(j)} & u_j^{(k)} & \cdots \\ \cdots & u_k^{(i)} & u_k^{(j)} & u_k^{(k)} & \cdots \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \vdots \\ T_i \\ T_j \\ T_k \\ \vdots \end{Bmatrix} \tag{5}$$

または，

$$\bar{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{u}^{(0)} + \boldsymbol{UT} \tag{6}$$

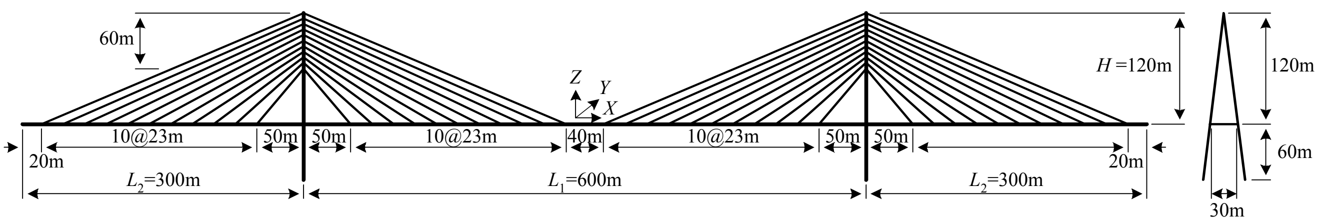
この式は，変位が規定された成分数nとケーブル張力を与える滑車の数mが等しい場合には，一意的に張力$\boldsymbol{T}$が求められる．しかし，後述の計算例のように，$m < n$の場合に，できる限り変位が規定値に近くなるようにケーブル張力を求めざるを得ない場合もある．このような方程式の数と未知数の異なる連立方程式を解く方法に，係数行列の特異値分解による方法[3] がある．この方法では，$\left|\bar{\boldsymbol{u}} - \boldsymbol{u}^{(0)} - \boldsymbol{UT}\right| \to min$となる解$\boldsymbol{T}$が求められる．すなわち，$\sum_i \left(\bar{u}_i - u_i\right)^2$ が最小となるような張力が求められる．



(a) P_1 で左右のケーブルの水平分力が等しくなるような条件を付加し，P_2 と P_3 では滑車が鉛直方向に移動しないようなケーブル張力 T_{r1}, T_{r2} を決定する．

(b) P_1 で左右のケーブル水平分力が等しくなるような条件を付加し，P_2 と P_3 の鉛直変位がゼロになるようにケーブル張力 T_r を決定する．

図２　斜張橋のモデル化



Cable: E=200GN/m^2, A=0.01m^2 ; Girder: E=200GN/m^2, A=0.5m^2 , I_y=1.2m^4, I_z=40m^4, J=3m^4
Tower: E=200GN/m^2, A=0.7m^2 , I_y= I_z=2.1m^4, J=5m^4

図３　斜張橋の形状

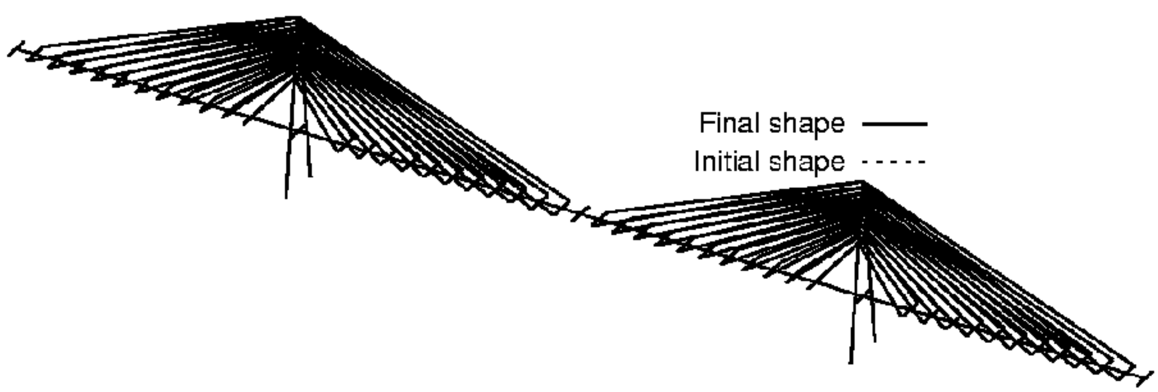


図４　斜張橋の形状決定後の形状

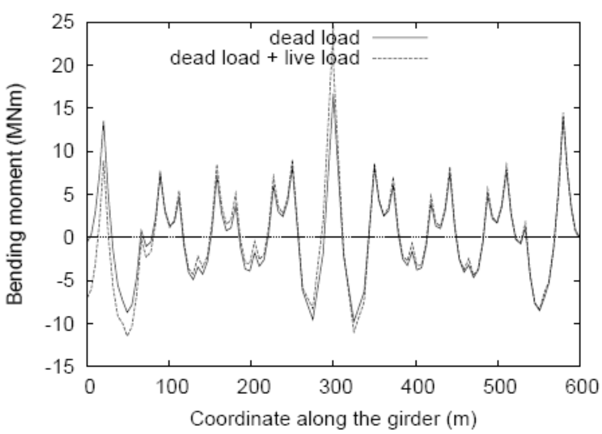


図５　斜張橋の桁の曲げモーメント

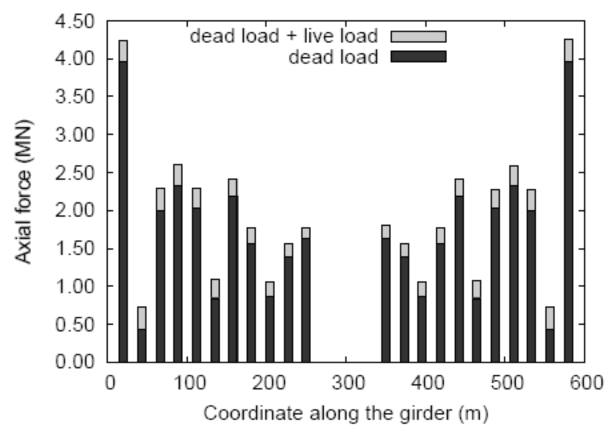


図６　斜張橋のケーブルの軸力

３．計算例

斜張橋について，以下のような形状決定の条件を満足するケーブル張力を求めることを考える．

自重が作用した状態での形状決定の条件

- 塔には曲げモーメントが作用しない
- 桁とケーブル接続部にたわみは生じない

上述の一つ目の条件は，塔から桁に接続された一対のケーブルについて，塔との接続部で水平分力が等しくなるような条件を与えると満足される．また，二つ目の条件は，ケーブルと桁の接続部の鉛直変位がゼロとなるように張力を決定することで満足される．

図２(a)はそのようなモデル化を示しているが，このようなモデル化を行うとケーブルのすべり変位を拘束する節点がないため，剛性行列が特異となる．そこで，図２(b)のように，桁と一対のケーブルの接続部では，一方の接続部にのみ滑車を導入することとし，前述の特異値分解を用いて，点 $\boldsymbol{P}_2$ と $\boldsymbol{P}_3$ の鉛直変位の二乗和が最小になるようにケーブル張力を決定することとする．

図３のような諸元の斜張橋を対象とし，桁自重の作用下で形状決定を行う．図４に，自重を想定したw=7kN/mの等分布荷重を桁に作用させたときの斜張橋の形状を示す．また，図５，６には，自重に相当する等分布荷重を作用させて形状決定を終えた斜張橋の滑車をすべて固定し，活荷重を想定したw=10kN/mの等分布荷重を作用させたときの桁，ケーブルの断面力を示している．

４．あとがき

本論文で扱っている滑車を用いた形状決定法は，形状決定と構造解析が同一の手法で行うことができるため，斜張橋をはじめ，種々のケーブル構造の解析が簡便に行える特徴を有している．さらに、他のプログラムによる結果を比較し、本提案の応用性を示した。

参考文献

1) Dang Tung Dang，岩崎英治，長井正嗣: ケーブル構造の等張力場における形状決定と構造解析，構造工学論文集, Vol.51A, pp.265-276, 2005.

2) Dang Tung Dang，岩崎英治，長井正嗣: ケーブル構造の形状決定に関する一計算法, 応用力学論文集, Vol.8, pp.133-142, 2005.

3) S.A.Teukolsky, W.T.Vetterling, B.P.Flannery andW.H.Press : Numerical Recipes in C++ ; The Art of Scientific Computing, Cambridge University Press,2004.