安定化有限要素法に基づく熱流体連成解析における直接法と分離型解法の比較

中央大学　学生員　○松崎　俊一
中央大学　学生員　石坂　俊輔
中央大学大学院　学生員　八田　政知
中央大学　正会員　樫山　和男

1. はじめに

近年，都市域において，ヒートアイランド現象や大気汚染が顕在化して久しい．これらの対策として，それぞれの都市における地形や気象などを考慮し，都市の熱・大気環境を定量的に予測・検証することは重要である．近年の計算機性能の向上や，数値解析手法の発展に伴い，これらの現象を評価するため，数値解析が数多く用いられている．また，数値解析を行う際に，これまでに数多く提案された手法の中から，現象に対して適切な解析手法を選択することは重要であり，それぞれの数値解析手法の特徴を理解する必要がある．

そこで本論文では，安定化有限要素法[1)]に基づく熱流体連成解析において，直接法と分離型解法の違いが解に与える影響について比較を行った．なお，比較には解析精度，計算時間，記憶容量の観点から行った．数値解析例として，2次元正方形 Cavity 内自然対流問題を行った．

2. 数値解析手法

(1) 基礎方程式

非圧縮性粘性流体を考え，Boussinesq 近似を仮定する．そのとき無次元化を施した運動方程式，連続式，エネルギー方程式はそれぞれ以下の式 **(1)**，**(2)**，**(3)** で表される．

運動方程式；

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}+u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial p}{\partial x_i}-\frac{1}{Re}\frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\Big)-\frac{Gr}{Re^2}\Theta k=0 \tag{1}$$

連続式；

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i}=0 \tag{2}$$

エネルギー方程式；

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t}+u_i\frac{\partial \Theta}{\partial x_i}-\frac{1}{PrRe}\frac{\partial^2\Theta}{\partial x_i^2}=0 \tag{3}$$

u_i は流速，t は時間，p は圧力，Θ は温度，$Re(=UL/\nu)$ は Reynolds 数，$Gr(=g\beta(\Theta_w-\Theta_c)L^3/\nu^2)$ は Grashof 数，$Pr(=\nu/\alpha)$ は Prandtl 数，$Ra(=Pr\cdot Gr)$ は Rayleigh 数を表している．但し，g は重力加速度，β は体膨張係数，Θ_w は高温壁温度，Θ_c は低温壁温度，U, L はそれぞれ代表流速，代表長さであり，ν は動粘性係数，α は温度伝導率，k は重力方向の単位ベクトルである．

(2) 直接法

直接法は，運動方程式と連続式を直接離散化し，圧力場と流速場を同時に解く手法である．基礎方程式 **(1)**，**(2)** に対して，移流項の卓越による数値不安定性および圧力振動を抑えるために SUPG/PSPG 法，式 **(3)** に対して SUPG 法に基づく安定化有限要素法を適用する．また，空間方向の離散化には P1/P1（流速・圧力一次補間）要素を用いて補間を行い，時間方向の離散化には 2 次精度である θ=0.5 の Crank − Nicolson 法を用いる．移流速度は，2 次精度 Adams-Bashforth 法により近似し，線形化する．連立一次方程式の解法には，Element-by-Element GPBi-CG 法を用いた．また，エネルギー方程式は陰的に扱った．

(3) 分離型解法

分離型解法は，圧力場と流速場を分離して解く手法である．基礎方程式 **(1)**，**(2)** を時間方向に離散化する．解析の手順は，まず流速の予測子として式 **(4)** と境界条件式より中間流速 $\tilde{u}_i$ を求める．次に，中間流速と式 **(5)** の Poisson 方程式と境界条件式より圧力 p^{n+1} を求める．そして，式 **(6)** より u_i^{n+1} を求める．

$$\tilde{u}_i=u_i^n-\Delta t\Big\{u_j^n\frac{\partial u_i^n}{\partial x_j}-\frac{1}{Re}\frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\frac{\partial u_i^n}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j^n}{\partial x_i}\Big)-\frac{Gr}{Re^2}\Theta k\Big\} \tag{4}$$

$$\frac{\partial^2 p^{n+1}}{\partial x_i^2}=\frac{1}{\Delta t}\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_i} \tag{5}$$

$$u_i^{n+1}=\tilde{u}_i-\Delta t\frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_i} \tag{6}$$

式 **(5)** と式 **(6)** に対しては Galerkin 法に基づく有限要素法，式 **(4)** に対しては SUPG 法に基づく安定化有限要素法を適用し，空間方向の離散化には P1/P1 要素による補間を行う．連立一次方程式の解法には Element-by-Element 前処理付き CG 法を用いた．エネルギー方程式の時間方向の離散化に関しては，直接法と同様に陰的解法 (Crank − Nicolson 法) を用いた．

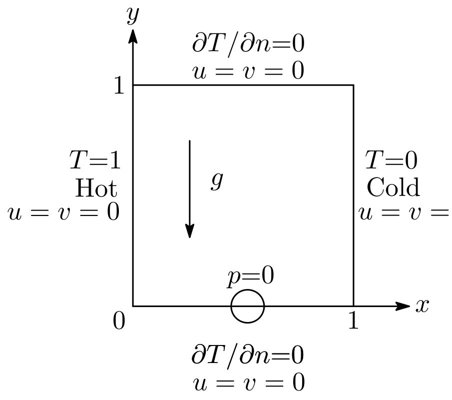
3. 数値解析例

(1) 2 次元正方形 Cavity 内自然対流問題

(2) 解析条件

解析領域，境界条件を **図－1** に示す．尚，分離型解法においては底面中心の一点において $p=0.0$ を与えた．初期条件は流速に関しては全領域で 0，温度に関しては高温壁面を除き $T=0$ とした．解析条件を **表－1** に示す．ΔL_{min} は最小メッシュ幅である．尚，$Ra=10^5$〜10^8 において

KeyWords：　安定化有限要素法，直接法，分離型解法
連絡先：　〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27　E-mail: d35327@educ.kc.chuo-u.ac.jp



図－１　解析領域

表－１　解析条件

Ra	Pr	メッシュ分割数	ΔL_{min}
10^3	0.71	10 × 10	1.00×10^{-1}
10^4	0.71	20 × 20	5.00×10^{-2}
10^5	0.71	20 × 20	1.74×10^{-2}
10^6	0.71	30 × 30	1.12×10^{-2}
10^7	0.71	40 × 40	8.22×10^{-3}
10^8	0.71	50 × 50	6.56×10^{-3}

は不等分割メッシュを用いた．また，平均 Nusselt 数は式 **(7)** で定義され，高温壁面と低温壁面の平均 Nusselt 数の差が 10^{-2} 以下となった状態で定常状態とみなした．また，$Ra = 10^7$, 10^8 は時間平均をとった値を示す．

$$N\bar{u}_{av} = \int_0^1 \left[\frac{\partial T}{\partial x}\right]_{x=0,1} dy \tag{7}$$

(3)　解析結果

表－２ に，$Ra = 10^3$〜10^8 の定常状態における平均 Nusselt 数を示す．また，**表－３** に，$Ra = 10^8$ の本解析結果と既存の数値解析解[2) 3)] の比較を示す．ただし，表中の U_{max}，V_{max} はそれぞれ Cavity の中心軸 $x = 0.5$ と $y = 0.5$ における速度の最大値を示し，Nu_{max}，Nu_{min} はそれぞれ定常状態の高温壁面における Nusselt 数の最大値，最小値を示している．また，x, y はそれぞれの座標値を示している．これらの結果より，両手法とも既存の数値解析解と良い一致を示しており，解析精度には差異は見られなかった．

表－４ に直接法と分離型解法での計算時間の比較を示す．分離型解法は 1 ステップあたりの計算時間が短いため，同じ解析条件では分離型解法の方が短時間で解析が行えた．しかし，直接法は 1 ステップあたりの計算時間は長いが，微小時間増分量を大きく設定しても安定に解析が行えるため，全体の計算時間は分離型解法と比較してもそれほど差異は見られなかった．また，記憶容量については分離型解法は直接法の約 1/3 となった．

4.　おわりに

本論文では，安定化有限要素法に基づく熱流体連成解析における直接法と分離型解法の比較を目的とし，数値解析例を通して解析精度，計算時間，記憶容量に関して比較検討を行い，以下の結論を得た．

- 解析精度においては，両手法とも既存の数値解析解と良い一致を示し，差異が見られなかった．
- 計算時間においては，直接法は微小時間増分量を大きくとることで，分離型解法とほぼ同等の計算時間となることが確認できた．
- 記憶容量においては，分離型解法では直接法に比べ約 1/3 の記憶容量ですむため大規模計算向きである．

今後の課題として，エネルギー方程式を陽的に扱い比較を行う．

表－２　平均 nusselt 数

Ra	10^3	10^4	10^5	10^6	10^7	10^8
直接法	1.092	2.196	4.399	8.843	16.994	30.694
分離型解法	1.095	2.195	4.361	8.816	16.877	30.666
柴田ら	1.114	2.206	4.438	8.819	16.747	29.868
角田ら	−	−	−	8.857	16.899	30.402

表－３　Ra=10^8 での解析結果

	ΔL_{min} (Mesh size)	U_{max} y	V_{max} x	Nu_{max} y	Nu_{min} y
直接法	6.56×10^{-3}	285.26	2177.79	72.774	1.905
	(50 × 50)	0.930	0.0142	0.0142	1.0000
分離型解法	6.56×10^{-3}	285.02	2177.59	71.907	2.164
	(50 × 50)	0.930	0.0142	0.0142	1.0000
柴田ら	6.51×10^{-3}	280.00	2260.00	69.354	2.218
	(50 × 50)	0.9298	0.0135	0.0135	1.0000
角田ら	1.16×10^{-2}	306.53	2036.72	66.242	1.510
	(50 × 50)	0.9381	0.0116	0.0231	1.0000

表－４　計算時間

		直接法	分離型解法
Ra	Δt	計算時間	
10^6	10^{-5}	12m 28s	2m 44s
	10^{-4}	1m 58s	計算不可
10^7	10^{-5}	26m 38s	4m 29s
	10^{-4}	4m 52s	計算不可
10^8	10^{-6}	4h 33m 4s	46m 3s
	10^{-5}	50m 36s	計算不可

参考文献

1) T.E.Tezduyar:Stablized finite element formulations for incompressible flow computations，Advance in Applied Mechanics，28，pp.1-44，1992.
2) 柴田悦太郎，槙原孝文，棚橋孝彦：CIP 有限要素法を用いた正方キャビティ内自然対流解析，日本機械学会論文集（B 編），66 巻 644 号，pp.99-106，2000
3) 角田和彦，川原祐子，登坂宣好：正方形キャビティ内自然対流の指数関数型 Petrov-Galerkin 有限要素解析，日本機械学会論文集（B 編），59 巻 564 号，pp.123-128，1993