

Boussinesq 方程式を用いた遡上津波力の安定化有限要素解析

中央大学大学院 学生員 ○ 利根川 大介
 中央大学大学院 学生員 川合 伸宜
 中央大学 正会員 田中 聖三
 中央大学 正会員 檜山 和男

1. はじめに

地震に伴い発生する津波は、沿岸域に甚大な被害をもたらす。近年のコンピュータ性能および数値解析技術の飛躍的向上により、数値シミュレーションは津波による被害推定に必要不可欠な存在となっている。津波による被害推定を高精度に行うためには、津波の遡上高さのみならず構造物に作用する流体力を定量的に評価する必要がある。著者らは、既往の研究において、有限要素法による Boussinesq 方程式を用いた津波遡上解析手法の構築を行ってきた¹⁾。

本論文は、その手法を発展させて、構造物に働く流体力を定量的に把握するための数値解析手法の提案を行うものである。空間の離散化手法には、SUPG 法に基づく安定化有限要素法²⁾を適用し、数値解析例として矩形水槽内の構造物に作用する流体力問題³⁾を取り上げ、実験値との比較により本手法の有効性を検討する。

2. 数値解析手法

(1) 支配方程式

支配方程式は、以下に示す Boussinesq 方程式を用いる。

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A}_i \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{x}_i} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_i} \left(\mathbf{N}_{ij} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{x}_j} \right) = \mathbf{K} + \mathbf{R} - \mathbf{G}\mathbf{U} \quad (1)$$

ここで、各ベクトルとマトリックスは以下ようになる。

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} H \\ U_1 H \\ U_2 H \end{bmatrix}, \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{h^2}{3} \frac{\partial^3 U_1 H}{\partial x_1 \partial x_i \partial t} \\ \frac{h^2}{3} \frac{\partial^3 U_2 H}{\partial x_2 \partial x_i \partial t} \end{bmatrix}, \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 \\ -c^2 \frac{\partial z}{\partial x_1} \\ -c^2 \frac{\partial z}{\partial x_2} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ c^2 - U_1^2 & 2U_1 & 0 \\ -U_1 U_2 & U_2 & U_1 \end{bmatrix}, \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -U_1 U_2 & U_2 & U_1 \\ c^2 - U_2^2 & 0 & 2U_2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{N}_{11} = \nu_e \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2U_1 & 2 & 0 \\ -U_2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{N}_{12} = \nu_e \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -U_1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{N}_{21} = \nu_e \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -U_2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{N}_{22} = \nu_e \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -U_1 & 1 & 0 \\ -2U_2 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{C_f \sqrt{U_1^2 + U_2^2}}{H} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{C_f \sqrt{U_1^2 + U_2^2}}{H} \end{bmatrix}, C_f = \frac{gn^2}{H^{1/3}}$$

ここで、 U_i は x, y 方向の断面平均流速、 $H(=h+\zeta)$ は

全水深、 h は静水深、 ζ は水位変動量、 $c(=\sqrt{gH})$ は波速、 g は重力加速度、 z は標高値、 ν_e は渦動粘性係数、 n はマニングの粗度係数である。

(2) 安定化有限要素法

支配方程式 (1) に対して、空間方向の離散化として SUPG 法に基づく安定化有限要素法を適用することにより、以下に示すような重み付き残差式が得られる。

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \mathbf{U}^* \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A}_i \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{x}_i} + \mathbf{G}\mathbf{U} - \mathbf{R} \right) d\Omega \\ & + \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \mathbf{U}^*}{\partial \mathbf{x}_i} \right) \cdot \left(\mathbf{N}_{ij} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{x}_j} + \mathbf{D} \right) d\Omega \\ & + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_e} \tau (\mathbf{A}_j)^T \left(\frac{\partial \mathbf{U}^*}{\partial \mathbf{x}_j} \right) \\ & \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A}_i \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{x}_i} + \mathbf{G}\mathbf{U} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_i} \left(\mathbf{N}_{ij} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{x}_j} \right) - \mathbf{K} - \mathbf{R} \right) d\Omega \\ & + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_e} \delta \left(\frac{\partial \mathbf{U}^*}{\partial \mathbf{x}_i} \right) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{x}_i} \right) d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

ここで、第 2 項にある $\mathbf{D}$ は分散項 $\mathbf{K}$ を部分積分したものである。また、式 (2) において左辺 1, 2 項目は Galerkin 項であり、3 項目の要素ごとの積分の総和項は SUPG 法による安定化項である。4 項目の要素ごとの積分の総和項は shock-capturing 項であり、水位の不連続面での数値不安定性を回避するものである。また τ, δ は安定化パラメータであり以下のように定義される。

$$\tau = \left[\left(\frac{2}{\Delta t} \right)^2 + \left(\frac{2\|U_i\|}{h_e} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (3)$$

$$\delta = \frac{h_e}{2} \|U_i\| \quad (4)$$

ここで、 h_e は要素サイズ、 Δt は微小時間増分量である。

時間方向の離散化として、2 次精度を有する Crank-Nicolson 法を用いた。また、連立一次方程式の解法には、Element-By-Element Bi-CGSTAB 法を用いた。

(3) 流体力評価法

時間ステップごとに計算された流速と水位を用いて、流体力を式 (1) より導かれる式 (5) の境界積分項より求める。解析領域 Ω 内部に境界が存在する場合を考える。図 1 に示すように構造物周り一層分のメッシュにより構成される領域 Ω^0 では、

KeyWords : 安定化有限要素法, Boussinesq 方程式, 津波力

連絡先 : 〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27 E-mail: tone@civil.chuo-u.ac.jp

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega^0} \mathbf{U}^* \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \bar{\mathbf{A}}_i \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{x}_i} + \mathbf{G}\mathbf{U} - \mathbf{R} \right) d\Omega \\
& + \int_{\Omega^0} \left(\frac{\partial \mathbf{U}^*}{\partial \mathbf{x}_i} \right) \cdot \left(-\mathbf{L}_i \mathbf{U} + \mathbf{N}_{ij} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{x}_j} \right) d\Omega \\
& + \int_{\Omega^0} \left(\frac{\partial \mathbf{U}^*}{\partial \mathbf{x}_i} \right) \cdot \mathbf{H} d\Omega = \int_{\Gamma_{in}} \mathbf{U}^* \mathbf{T} d\Gamma \quad (5)
\end{aligned}$$

が成り立つ。ここで、各ベクトルとマトリックスは以下のようである。

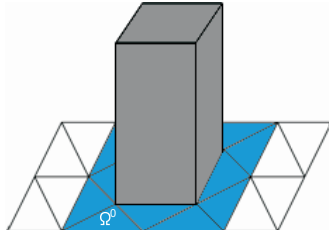


図-1 構造物周りのメッシュの拡大図

$$\bar{\mathbf{A}}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -U_1^2 & 2U_1 & 0 \\ -U_1U_2 & U_2 & U_1 \end{bmatrix}, \bar{\mathbf{A}}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -U_1U_2 & U_2 & U_1 \\ -U_2^2 & 0 & 2U_2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{L}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ c^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{L}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ c^2 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{h^2}{3} \frac{\partial^2 U_i H}{\partial x_1 \partial t} \\ \frac{h^2}{3} \frac{\partial^2 U_i H}{\partial x_2 \partial t} \end{bmatrix}, \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{t}_1 H \\ \hat{t}_2 H \end{bmatrix}$$

ここで、 $\hat{t}_i$ は境界に働く力を表す。よって式 (5) を鉛直方向に積分し、計算された流速と水位を代入することにより構造物に働く流体力が求められる。

3. 数値解析例

(1) 矩形水槽内の構造物に作用する流体力問題

本手法の有効性を検討するため、矩形水槽内の構造物に作用する流体力問題を取り上げる。図-2 に、解析モデルを示す。有限要素分割は、分割幅 x 方向、 y 方向共に 1.0[cm] とし、総要素数 19232、総節点数 9861 である。解析条件として、微小時間増分量は 0.01[sec] とした。

(2) 解析結果

図-3 において、構造物に働く流体力の時刻歴と実験値との比較を、図-4 において、波形図を示す。図-3 より、衝突直後、流体力は実験値³⁾ に比べ過大評価しているが、その後は定性的に良い一致を示している。また図-4 に示す波形図より、波が構造物に衝突する様子が捉えられており、安定に解析が行えていることがわかる。

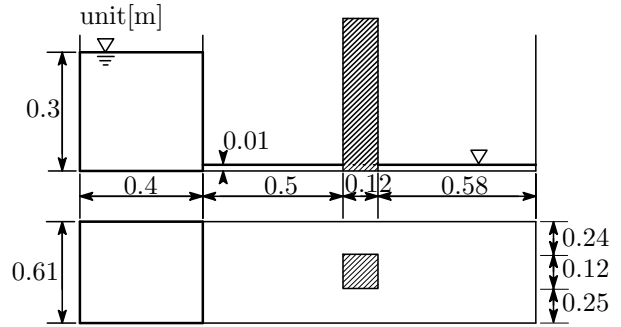


図-2 解析モデル

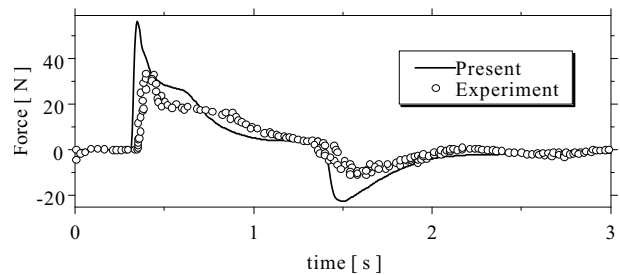


図-3 構造物に働く流体力の時刻歴

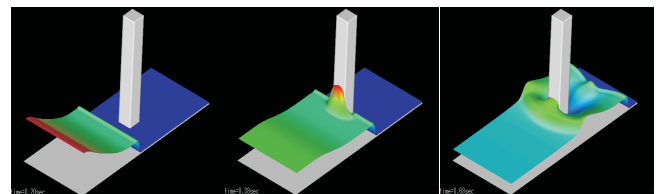


図-4 各時刻における波形図 (0.2, 0.38, 0.68 秒)

4. おわりに

本論文では、支配方程式に Boussinesq 方程式を用い、構造物に働く流体力を定量的に把握するための数値解析手法の提案を行った。数値解析例として矩形水槽内の構造物に作用する流体力問題を取り上げ、手法の妥当性の検討を行った。その結果、構造物に働く流体力の時刻歴は実験値に比べ、波の衝突直後において若干の差異が見られたが、概ね定量的に良い一致を示していることが確認された。

今後は、本手法を過去の津波被害の事例に適用し、妥当性の検証と信頼性の向上を図る予定である。

参考文献

- 1) 利根川大介, 川合伸宜, 田中聖三, 樫山和男: 安定化有限要素法による津波遡上解析: 土木学会関東支部技術研究発表会概要集 (CD-ROM) : 34, 2007.
- 2) T.E.Tezduyar: Stabilized finite element formulations for incompressible flow computations, *Advance in applied Mech.*, 28, pp1-44, 1991
- 3) Gomez-Gesteira M, Dalrymple RA: Using a three-dimensional smoothed particle hydrodynamics method for wave impact on a tall structure, *Journal of Waterway Port Coastal and Ocean Engineering*, 130, pp63-69, 2004