防波堤体周りの２次元水波の解析解に関する一検討

防衛大学校　機械システム工学科　正会員 ○瀬戸　秀幸

1. はじめに

堤体周りの水波の問題は，海洋工学における最も基本的な研究テーマの一つであり，その解析解についても多くの研究がなされてきている．ただその中には，一見妥当に見えるものの子細に見れば理論上問題なしとしないものもあり，それらが一般の場合へ安直に拡張適用されないよう問題の所在を明らかにしておくことは必要である．

本報では，厳密解の構成法として清川・小林により提案された「境界展開法」[1)]を例に，他の解析解や数値解との比較を通してその理論上の問題点の検証を試みる．

2. ２次元水波の堤体による散乱の基礎理論

座標系は Fig.1 に示すように静止水面上に原点 o と x 軸を，鉛直上向きに z 軸をとる．入射波は x の正の方向から入射し，任意傾斜の防波堤で反射・散乱されるものとし，水深は防波堤近くまで一定値 h とする．

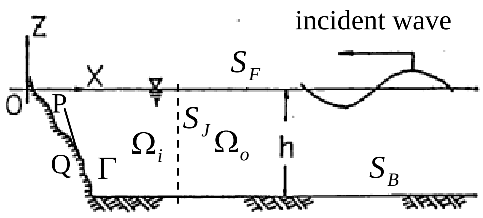

Fig.1　座標系

また流体は非粘性，非圧縮性，流体運動は非回転で，時間項が $e^{i\omega t}$（ω ：入射波の円振動数）で与えられる定常周期運動とする．このとき，流場の複素速度ポテンシャルは，つぎの形に表される．

$$\Phi(x,z) = i(g\varsigma_a/\omega)\phi(x,z)$$

$$\phi(x,z) = \phi_W(x,z) + \phi_D(x,z) \qquad (1)$$

ここに， g は重力加速度， ζ_a は入射波振幅， ϕ_W は所与の入射波ポテンシャルで， κ_0 を波数とすると，

$$\phi_W(x,z) = \frac{\cosh\kappa_0(z+h)}{\cosh\kappa_0 h}e^{i\kappa_0 x} \qquad (2)$$

また $\phi_D(x,z)$ は求めるべき散乱ポテンシャルであり，つぎの境界値問題(3)$_{1\sim5}$の解として与えられる．

$$\nabla^2\phi_D = 0 \quad \text{流体中}\Omega\text{で}$$

$$\partial\phi_D/\partial z - (\omega^2/g)\phi_D = 0 \quad \text{水面上}S_F\text{で}$$

$$\partial\phi_D/\partial z = 0 \quad \text{平らな水底}S_B\text{で} \qquad (3)$$

$$\partial\phi_D/\partial n = -\partial\phi_W/\partial n \quad \text{堤体表面上}\Gamma\text{で}$$

$$\partial\phi_D/\partial x + i\kappa_0\phi_D \sim 0 \quad x \to +\infty\text{で}$$

ここに， n は Γ 上での流体から外向きの法線である．

いま，堤体近くの一定水深域に鉛直な仮想境界 S_J をとり，それより沖側の流場 Ω_o を考えると，そこで ϕ_D は，

$$\phi_D = c_0 Z_0(z)e^{-i\kappa_0 x} + \sum_{m=1}^{\infty} c_m Z_m(z)e^{-\kappa_m x} \qquad (4)$$

という未定係数 $c_m(m \geq 0)$ を含む形に直交固有関数展開表示できる．ただし， κ_0， $i\kappa_m(m \geq 1)$ はつぎの分散方程式の１正根と無限個の純虚根，

$$\kappa\tanh\kappa h = \omega^2/g$$

$Z_0(z)$， $Z_m(z)(m \geq 1)$ は各々対応する固有関数で

$$Z_0(z) = \frac{\cosh\kappa_0(z+h)}{\cosh\kappa_0 h},\quad Z_m(z) = \frac{\cos\kappa_m(z+h)}{\cos\kappa_m h}$$

$Z_m(z)$ のつぎの直交性を用いると，防波堤が鉛直で，流場全域が式(4)で表される場合は， c_m が解析的に決定できて， ϕ_D，すなわち ϕ の厳密解を得ることができる．

$$q_m\delta_{mm'} = \int_{-h}^{0} Z_m(z)Z_{m'}(z)dz,\ \ (m = 0,1,\ldots)$$

3. 「境界展開法」とその問題点

清川・小林の「境界展開法」では，仮想境界 S_J の堤体側 $\Omega_i(=\Omega-\Omega_o)$ でも ϕ_D に式(4)の表示を用いる．原論文の幾分持って回った展開を要約すれば，堤体表面 Γ が $(x(z),z)$ の形に表されるとき，残る Γ 上での不透過性条件(3)$_4$を，z に関するつぎの重み付き残差法に類似する仕方で合わせようとするものと解せる．

$$c_0 B_{0\alpha} + \sum_{m=1}^{\infty} c_m B_{m\alpha} = d_\alpha,\ \ (\alpha = 0,1,\ldots,\infty) \qquad (5)$$

$$B_{0\alpha} = \int_{-h}^{0} Z_\alpha(z)\{e^{-i\kappa_0 x(z)}Z_0(z)\}_{,n}dz$$

$$B_{m\alpha} = \int_{-h}^{0} Z_\alpha(z)\{e^{-\kappa_m x(z)}Z_m(z)\}_{,n}dz$$

$$d_\alpha = -\int_{-h}^{0} Z_\alpha(z)\{e^{i\kappa_0 x(z)}Z_0(z)\}_{,n}dz$$

ここに， $\{\}_{,n}$ は法線方向微分を表わす．

係数 c_m は展開を有限項で打ち切って得られる連立方程式の数値解として決定されることになる．

一風変わったアプローチであるものの一見それでも良さそうであるが，子細にみるとおかしな点が見受けられる．係数が数値解としてしか決まらない取扱いを表題のように「厳密解の構成法」と呼ぶことは用語上適切かどうか，また積分型の境界法の場合，普通は境界に沿った重み付き積分の形で条件を合わせるところを z 方向の積分で代用する形に持ち込むも直交性は使えず，結局は数値積分に帰させており，そのメリットは不明等．それはおくとしても同アプローチには出発

キーワード 水波，解析解，　防波堤

連絡先 〒239-8686 神奈川県横須賀市走水 1-10-20 防衛大学校機械システム工学科 TEL.046-841-3801 (内線 3435) E-mail : seto@nda.ac.jp

点において理論上基本的な勘違いがある．外部解を単純に内部に延長して厳密解が得られるという暗黙の前提から出発している点である．それは理論上一般には正しくなく，当然その結果は厳密解を与えない．

式(4)は，鉛直仮想境界 S_J より沖側 Ω_o で成り立つとできても堤体側 Ω_i では厳密には成り立たない．後者では非鉛直な堤体 Γ 上方での ϕ_D には $e^{-i\kappa_0 x}, e^{-\kappa_m x}$ だけでなく $e^{i\kappa_0 x}, e^{\kappa_m x}$ の項も考える必要がある．

何故なら，観測点 $P(x,z)\in\Omega_i$ における $\phi_D(P)$ は積分方程式表示を用いてつぎの形に表される．

$$2\pi\phi_D(P)=\int_\Gamma\{\frac{\partial\phi_D}{\partial n}\Big|_Q-\phi\frac{\partial}{\partial n}\Big|_Q\}G(P,Q)ds\Big|_Q \qquad (6)$$

ここに，$Q(\xi,\zeta)\in\Gamma$ は特異点，$G(P,Q)$ は一定水深波動場の Green 関数で，F. John 表示式 [2)]によれば，

$$Z_0(\zeta)Z_0(z)e^{-i\kappa_0|x-\xi|}, Z_\alpha(\zeta)Z_\alpha(z)e^{-\kappa_\alpha|x-\xi|}, (\alpha\ge 1)$$

の線形結合で与えられる．

その表示を代入して式(6)を整理すると，$\phi_D(P)$ に

$x<\xi\in\Gamma$ の Q より　$e^{-i\kappa_0 x}, e^{-\kappa_m x}$ 項,

$x>\xi\in\Gamma$ の Q より　$e^{i\kappa_0 x}, e^{\kappa_m x}$ 項

が加わることが分かる．一般の堤体の場合に，$x>\xi\in\Gamma$ からの寄与が相殺し合って恒等的に０になることは一般にはないので，内側 Ω_i で式(4)の表示を用いることは厳密には正しくないことが示された．従って，清川・小林の厳密解を構成できたという主張は成り立たない．ただし，堤体が鉛直に近い場合は式(4)が近似的に成り立つとしてよい場合はある．

4．考察と数値的検証

論点が際だつよう，幾分特殊ではあるが，鉛直堤の前方に潜堤がある場合の例(Fig.2)について，領域分割法による解析解や hybrid 型有限要素法や境界要素法による数値解との比較による例証を試みる．

領域分割法 [3)]では，全領域を $x=a_1, a_2$ で３分し，ϕ_D として $x\ge a_1$ (領域 I)で ϕ_D^I に式(4)を用いるものの，内部部分領域 $a_3\le x\le a_2$ (領域 III)では，μ_β，$\zeta_\beta(z)$ を領域の固有値，固有関数として，

$$\phi_D^{III}=\zeta_0(z)\{D_0^+e^{i\mu_0 x}+D_0^-e^{-i\mu_0 x}\}+\sum_{\beta=1}^\infty\zeta_\beta(z)\{D_\beta^+e^{\mu_0 x}+D_\beta^-e^{-\mu_0 x}\} \qquad (7)$$

の形にとる．$a_2\le x\le a_1$ (領域 II)の ϕ_D^{II} も同形にとる．波動場は，対応する ϕ_D と $\partial\phi_D/\partial x$ とが接続境界で連続となるように未定係数を決めれば，確定される．

本タイプの問題に対して領域分割法が精度のよい解析解を与えることは公知であるが，「境界展開法」では $e^{i\mu_0 x}$ 等に相当する項を含まないため，結果は異なると予想される．$e^{i\mu_0 x}$ 等の欠落は，物理的には鉛直堤で反射された入射波が潜堤で再び反射される影響が取り入れられず，起こりうる両堤の間での共振に近い現象が再現できないことになる．

$h_2=h$ という特別な場合，両結果が一致するためには $D_0^+=D_\beta^+=0$ が必要であるが，一般にそうはならない．見方を変えれば，その違いが近似度チェックの一つの目安ともいえる．

上記解析解のチェックのため，$x=a_0>a_1$ に鉛直仮想境界を考え，そこで厳密に成り立つつぎの拡張型放射条件を用いた内部場に対応する hybrid 有限要素法 [4,5)]や境界要素法 [4,6)]による数値解との比較も実施した．

$$\frac{\partial\phi_D}{\partial x}\Big|_{x=a_0}+i\frac{\kappa_0}{q_0}Z_0(z)\int_{-h}^0\phi_D(a_0,\zeta)Z_0(\zeta)d\zeta+\sum_{m=1}^\infty\frac{\kappa_m}{q_m}Z_m(z)\int_{-h}^0\phi_D(a_0,\zeta)Z_m(\zeta)d\zeta=0 \qquad (8)$$

一例として，a_1, a_2, a_3 =5,10,15m，h, h_1, h_2 =10,5,10m，波周期 8sec (κ_0 =0.08868)とし，β を３項までとると，

D_0^+ = 0.236-0.3994i，D_0^- = 1.090+0.7053i，....

となって，D_0^+ = 0 とは有意な差が生じ，「境界展開法」が有意な誤差を含む近似解に留まることが傍証できる．領域分割法の解析解は３項程度でも，hybrid 有限要素法や境界要素法の数値解とよい一致を示すことも確認できているが，紙数の制約もあるため，詳しい検討は講演の折に示すこととしたい．

5．結び

水波の解析解は海洋水理の基礎として，基本的に重要であるが，中には問題なアプローチも散見される．

本検討では，厳密解の構成法として清川・小林により提案された「境界展開法」の解が厳密解とはいえず，特定の条件での近似解の域を出ないことを，理論と計算の両面から例証した．外部解を単純に内部に延長して厳密解を得たとする勘違いは他にも見受けられ，それらの一般の場合への拡張適用には注意を要する．

参考文献

1) 清川，小林：急勾配任意断面斜面による波の反射の厳密解の構成法とその応用，第 28 回海岸工学講演会論文集，pp.362-366，1981.
2) John F., Comm. Pure and Appl. Math. Vol.2-3,1949-50
3) 井島，土木学会論文報告集，第 202 号，1972
4) 瀬戸，海洋工学懇談会資料，（於広大）1978.1.13
5) Seto H., *in* Finite Element Flow Problems, U.Tokyo,1982
6) 瀬戸，境界要素法研究会資料 BEM84-5-3,1984.9.28

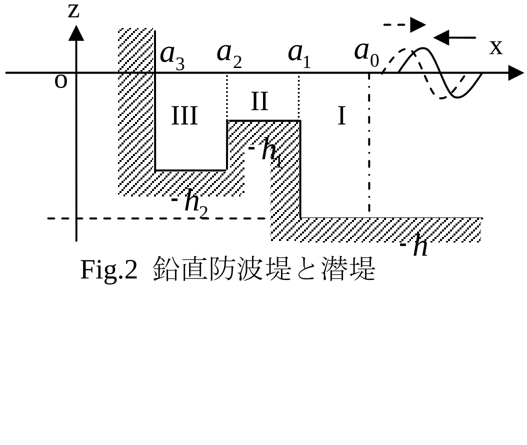

Fig.2 鉛直防波堤と潜堤