ALE安定化有限要素法に基づくシェル要素を用いた流体構造連成解析

中央大学大学院　学生員　○ 河原崎　雄介
中央大学　正会員　田中　聖三
中央大学　正会員　樫山　和男

1. はじめに

流体構造連成問題とは，流体と構造物の相互作用により引き起こされる力学現象であり，この挙動を正確に把握するためには，流体と構造物の連成解析が必要不可欠となる．

著者らは，既往の研究において，ALE 安定化有限要素法を用いて剛体を仮定した構造物に対する連成解析手法の構築[1)]及び，弾性体を仮定した構造物に対してソリッド要素を用いた連成解析手法の構築を行ってきた[2)]．一方，近年，デザイン学的および材料力学的に優れるシェル構造と呼ばれる薄い曲面板からなる構造物が数多く計画・設計されている．

本論文は，既往の ALE 安定化有限要素法に基づく流体構造連成解析手法の拡張として，近年増加が著しいシェル・薄肉構造物の取り扱いが可能となるように，構造要素として面内変形と曲げ変形を組み合わせた平面シェル要素の導入の検討を行うものである．数値解析例として，片持ち梁の自由振動問題および弾性板の渦振動問題を取り上げる．片持ち梁の自由振動問題では，平面シェル要素による構造解析の近似性能の検討を厳密解との比較を基に行う．また，弾性板の渦振動問題では，構造物の応答の検討を参照解との比較により行う．

2. 数値解析手法

(1) 基礎方程式

a) 流体の基礎方程式

ALE 記述された非圧縮性粘性流体の運動方程式及び連続式はそれぞれ以下の式 **(1)**，**(2)** で表される．

$$\rho\Big(\dot{\mathbf{u}}+\bar{\mathbf{u}}\cdot\nabla\mathbf{u}-\mathbf{f}\Big)-\nabla\cdot\sigma\left(\mathbf{u},\,p\right)=0 \tag{1}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{u}=0 \tag{2}$$

ここで，ρ は密度，$\mathbf{u}$ は流速ベクトル，$\bar{\mathbf{u}}$ は相対流速ベクトル，$\mathbf{f}$ は物体力ベクトルを表している. また，応力テンソル σ は以下の式 **(3)** で表される．

$$\sigma=-p\mathbf{I}+\mu\left(\nabla\mathbf{u}+\left(\nabla\mathbf{u}\right)^{T}\right) \tag{3}$$

ここで，p は圧力，μ は粘性係数である．

b) 構造の基礎方程式

構造の運動方程式は以下の式 **(4)** で表され．適合条件式，構成式は以下の式 **(5)**，**(6)**

$$\nabla\cdot\sigma-\rho\ddot{\mathbf{v}}=\mathbf{F^s}, \tag{4}$$

$$\varepsilon\left(\mathbf{v}\right)=\frac{1}{2}\left(\nabla\mathbf{v}+\left(\nabla\mathbf{v}\right)^{T}\right), \tag{5}$$

$$\sigma=\mathbf{D}\varepsilon\left(\mathbf{v}\right) \tag{6}$$

ここで，σ，ε，$\mathbf{v}$，ρ，$\mathbf{D}$，$\mathbf{F^s}$ はそれぞれ，応力，ひずみ，変位，密度，弾性テンソル，外力荷重を表す．

(2) 有限要素方程式

a) 流体の有限要素方程式

流体の基礎方程式 **(1)**，**(2)** に対して，安定化有限要素法 (SUPG/PSPG 法)[3)] を適用し，空間方向に離散化を行うと以下の有限要素方程式が得られる．

$$\begin{aligned}&\left(\mathbf{M}+\mathbf{M}_{\delta}\right)\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}+\left(\mathbf{K}\left(\bar{\mathbf{u}}\right)+\mathbf{K}_{\delta}\left(\bar{\mathbf{u}}\right)\right)\mathbf{u}\\&-\left(\mathbf{C}-\mathbf{C}_{\delta}\right)\frac{1}{\rho}p+\nu\mathbf{S}\mathbf{u}-\left(\mathbf{F}+\mathbf{F}_{\delta}\right)=0\end{aligned} \tag{7}$$

$$\mathbf{C}^{T}\mathbf{u}+\mathbf{M}_{\varepsilon}\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}+\mathbf{K}_{\varepsilon}\left(\bar{\mathbf{u}}\right)\mathbf{u}-\mathbf{F}_{\varepsilon}+\mathbf{C}_{\varepsilon}\frac{1}{\rho}p=0 \tag{8}$$

ここで，$\mathbf{M}$，$\mathbf{K}$，$\mathbf{C}$，$\mathbf{S}$ は係数行列，$\mathbf{F}$ は外力ベクトルであり添字 δ，ε はそれぞれ SUPG 項，PSPG 項に起因するものを表わす．ここで，流体の時間方向の離散化には Crank-Nicolson 法を用いる．

b) 構造の有限要素方程式

本研究では，構造部の離散化要素として，面内変形要素と曲げ変形要素を組み合わせた平面シェル要素を用いる[4)]．面内変形要素として，4 節点アイソパラメトリック要素，曲げ変形要素として，Mindlin 理論に基づく板曲げ変形要素を用い，面内変形 u,v，たわみ w，たわみ角 θ_x,θ_y に対応するように要素合成行列を組み合わせると以下のようになる．

$$\mathbf{K}^{s}=\begin{bmatrix}\mathbf{K}^{i}&\mathbf{K}^{i}&0&0&0&0\\\mathbf{K}^{i}&\mathbf{K}^{i}&0&0&0&0\\0&0&\mathbf{K}^{m}&\mathbf{K}^{m}&\mathbf{K}^{m}&0\\0&0&\mathbf{K}^{m}&\mathbf{K}^{m}&\mathbf{K}^{m}&0\\0&0&\mathbf{K}^{m}&\mathbf{K}^{m}&\mathbf{K}^{m}&0\\0&0&0&0&0&\mathbf{K}^{t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u\\v\\w\\\theta_x\\\theta_y\\\theta_z\end{bmatrix} \tag{9}$$

ここで，添え字 i，m，t はそれぞれ，面内変形，曲げ変形，z 軸周りのたわみ角に起因するものを表している．また，z 軸周りのたわみ角の剛性に関しては Zienkiewicz らが提案している，仮想剛性を付加している[5)]．また，質量行列に関しても同様に組み合わせることで，以下の構造の有限要素方程式が得られる．

$$\mathbf{M}^{s}\ddot{\mathbf{v}}+\mathbf{K}^{s}\mathbf{v}=\mathbf{F}^{s} \tag{10}$$

なお，構造の時間方向の離散化として, Newmark-β 法を用いる．

(3) 構造と流体の連成解析手法

安定化を施された式 **(7)** は以下の式 **(11)** のように書き換えることができる．

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{u}}+\mathbf{K}\mathbf{u}-\mathbf{G}p=\tilde{\mathbf{F}} \tag{11}$$

KeyWords：　ALE 安定化有限要素法，流体構造連成，シェル要素
連絡先：　〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27　TEL 03-3817-1815　E-Mail kawarasaki@civil.chuo-u.ac.jp

式 (11) における，解析領域全体の節点に関する変数ベクトル $\mathbf{u}$，$\tilde{\mathbf{F}}$ を移動境界上 α とそれ以外の領域 γ に区別し，移動境界上の幾何学的連続条件及び，平衡状態を考慮した流体の運動方程式 (7)，連続式 (8) 及び，構造の運動方程式 (10) は以下のように表される．

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{M}}^{\alpha\alpha} & \tilde{\mathbf{M}}^{\alpha\gamma} \\ \tilde{\mathbf{M}}^{\gamma\alpha} & \tilde{\mathbf{M}}^{\gamma\gamma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{u}}^{\alpha} \\ \ddot{\mathbf{v}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{K}}^{\alpha\alpha} & \tilde{\mathbf{K}}^{\alpha\gamma} \\ \tilde{\mathbf{K}}^{\gamma\alpha} & \tilde{\mathbf{K}}^{\gamma\gamma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}^{\alpha} \\ \dot{\mathbf{v}} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{G}}^{\alpha} \\ \tilde{\mathbf{G}}^{\gamma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{F}}^{\alpha} \\ \tilde{\mathbf{F}}^{\gamma} \end{bmatrix} \qquad (12)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{M}}^{\alpha}_{\varepsilon} & \tilde{\mathbf{M}}^{\gamma}_{\varepsilon} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{u}}^{\alpha} \\ \ddot{\mathbf{v}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{C}}^{\alpha} & \tilde{\mathbf{C}}^{\gamma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}^{\alpha} \\ \dot{\mathbf{v}} \end{bmatrix} + \mathbf{G}_{\varepsilon} p = \mathbf{F}_{\varepsilon} \qquad (13)$$

$$\mathbf{M}^{s}\ddot{\mathbf{v}} + \mathbf{K}^{s}\mathbf{v} = -\mathbf{F}^{\gamma} \qquad (14)$$

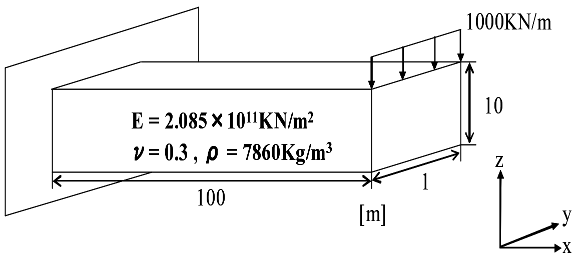
ここで，本研究で用いる弱連成法では，流体の運動方程式 (12)，連続式 (13) 及び，構造の運動方程式 (14) を移動境界上の境界条件を修正しながら交互に解き時間進行させる．

3.　数値解析例

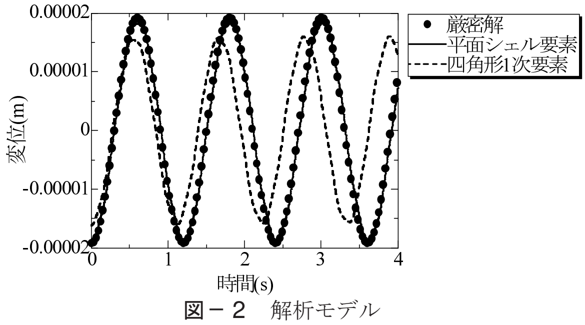
(1)　片持ち梁の自由振動問題

平面シェル要素による構造解析の近似性能の検討を行うため，片持ち梁の自由振動問題を取り上げる．解析モデル，解析条件を 図－1 に示す．y 軸方向を単位長さとし，2 次元梁理論による厳密解，四角形 1 次要素との比較を行った．なお，平面シェル要素，四角形 1 次要素ともに x 軸方向に 20 分割とした．

図－2 に弾性体右端変位の時刻歴を示す．平面シェル要素による結果は梁理論厳密解とよい一致を示している．また，四角形要素に比べ，振幅，振動周期に関して，精度の良い結果が得られた．



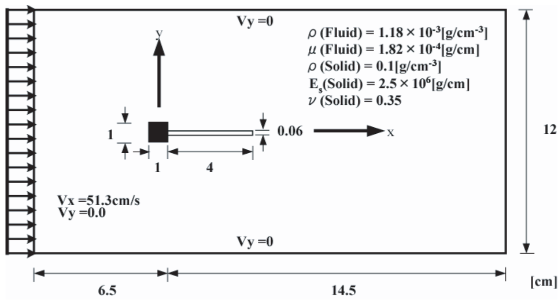
図－1　解析モデル



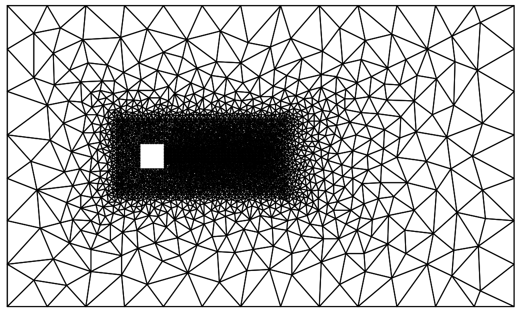
図－2　解析モデル

(2)　弾性板の渦振動問題

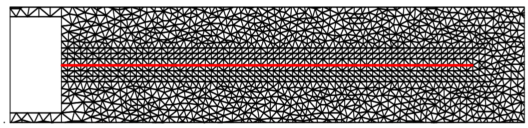
流体構造連成問題として，弾性板の渦振動問題を取り上げ，構造物の応答の検討を参照解との比較により行う．図－3 に解析モデルと各種計算条件を示す．解析条件は



図－3　解析領域と各種計算条件



図－4　解析メッシュ節点数 4136，要素数 8059



図－5　構造部近傍

Wall の条件と同一条件とする[6)]．図－4，図－5 解析メッシュ及び構造部近傍のメッシュを示す．図－5 における赤いラインは構造物を示し，構造部は平面シェル要素によりモデル化した．構造物境界上では流体メッシュを 2 重節点としている．

なお，平面シェル要素を用いた弾性板の渦振動問題の計算結果及び，考察に関しては，講演時に示す．

4.　おわりに

本論文では，ALE 安定化有限要素法に基づく薄肉構造に対する流体構造連成解析手法の構築を行った．今後，より実現象に近い問題に対して，流体構造連成解析を行う予定である．

参考文献

1) 河原崎雄介，田中聖三，樫山和男：渦励振動問題における流体-構造連成解析手法の比較検討：土木学会関東支部技術研究発表会概要集 (CD-ROM) ：**34**,2007.
2) 河原崎雄介，田中聖三，樫山和男：ALE 安定化有限要素法に基づく流体構造連成解析手法の構築：土木学会年次学術講演会概要集 (CD-ROM) ：**62**,2007.
3) T.E.Tezduyar,et al:Stabilized finite element formulations for incompressoble flow computations,*Advanced Appl Mech*__28__,pp1-44,1992.
4) 鷲津久一郎，宮本博，山田嘉昭，山本善之，川井忠彦:有限要素法ハンドブック (基礎編):培風館:1981
5) O.C.Zienkiewicz:'The Finite Element Method in Engineering Science'*McGraw-Hill*, 1971
6) Wall,W.A.Fluid-Struktur-Interaktion mit stabilisierten Finiten Elementen:PhD thesis,Universit at Stuttgart,1999