

三角形非構造格子を用いた有限被覆法による大変形固体解析

中央大学大学院	学生員	寺沢 英之
中央大学	正会員	檜山 和男
広島大学	正会員	岡澤 重信
東北大学	正会員	車谷 麻緒
東北大学	正会員	寺田 賢二郎

1. はじめに

大変形を伴う塑性加工や衝撃問題の解析において、移動メッシュを用いる Lagrange 解法はメッシュの破綻を招き解析が困難になる場合がしばしばある。そこで、近年、固定メッシュにより変形を記述する Eulerian 解法は、固体の境界形状を流体計算における自由表面と同様に取り扱うことにより、大変形解析が可能となる手法として注目されている。著者らは、既往の研究において、四角形要素および三角形要素を用いた Eulerian 有限要素法の構築を行い、その有効性を示してきた。¹⁾²⁾ しかし、VOF 関数により固体境界面を間接的に表現していたために、移動する固体境界面に対して力学的境界条件を精度良く課することは困難であった。

そこで、本研究では上記の問題点を解決する手法として、有限被覆法 (Finite Cover Method)³⁾ の適用を検討する。有限被覆法は、近似関数を構成する数学領域と支配方程式を満たす物理領域を独立に定義することができるため、固定メッシュにおいて境界条件を課することが可能になる手法である。なお、有限要素としては任意形状の適用性に優れた三角形一次要素に基づく非構造格子を用いる。本手法の妥当性と有効性を検討するため、数値解析例として棒の衝突問題を取り上げた。

2. 数値解析手法

(1) operator split 法

Eulerian 解法における支配方程式は、次式のように表される。

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}} = f \quad (1)$$

ここで、 $\mathbf{u}$, $\mathbf{x}$ はそれぞれ速度ベクトル、位置ベクトルを表す。式 (1) に対して、operator split 法を用いて次式のように 2 つに分割する。

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = f \quad (2)$$

$$\frac{\partial \Phi^*}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \frac{\partial \Phi^*}{\partial \mathbf{x}} = 0 \quad (3)$$

式 (2) は、外力項を含んだ非移流ステップ、式 (3) は、移流項を含んだ移流ステップにおける方程式である。このとき式 (3) における * 印は、非移流ステップ後の値を意味し、式 (3) において、応力、ひずみ等の非移流ステップ後の解を固定の計算要素に投影させている。

(2) 非移流ステップ

operator split 法における非移流ステップにおいては、通常の動的陽解法をそのまま用いる。

$$\overline{\mathbf{M}} \dot{\mathbf{u}}^n + \mathbf{F}_{\text{int}}^n = \mathbf{F}_{\text{ext}}^n \quad (4)$$

ここで、 $\overline{\mathbf{M}}$ は対角化された集中質量行列、 $\mathbf{F}_{\text{int}}$ は内力ベクトル、 $\mathbf{F}_{\text{ext}}$ は外力ベクトルを表わす。また上添字 n は、現時刻ステップであることを意味する。式 (4) に対して、中央差分法を適用させると時刻 t^{n+1} の位置ベクトル $\mathbf{x}^{n+1}$ 及び、時刻 $t^{n+\frac{1}{2}}$ の速度ベクトル $\mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}}$ は、次式のように求めることができる。

$$\mathbf{x}^{n+1} = \mathbf{x}^n + \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}} \Delta t \quad (5)$$

$$\mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}} = \mathbf{u}^{n-\frac{1}{2}} + \dot{\mathbf{u}}^n \Delta t \quad (6)$$

このとき、加速度ベクトル $\dot{\mathbf{u}}^n$ は、式 (4) により求まる。

(3) 移流 ステップ

本研究では、自由境界面を表現するために、VOF 法を適用する。また、移流方程式の解法には高精度移流スキームとして知られる CIVA 法⁴⁾ を適用する。CIVA 法は移流方程式の厳密解 (式 (7)) から、時刻 $t - \Delta t$ において上流点に位置するの $\mathbf{x} - \mathbf{u} \Delta t$ の値 $\phi^n(\mathbf{x} - \mathbf{u} \Delta t, t - \Delta t)$ を、上流点を含む要素間で補間することによって $\phi^{n+1}(\mathbf{x}, t)$ を求める手法である。

$$\phi^{n+1}(\mathbf{x}, t) = \phi^n(\mathbf{x} - \mathbf{u} \Delta t, t - \Delta t) \quad (7)$$

(4) 有限被覆法 (Finite Cover Method)

FCM は、近似関数が定義される数学的な部分領域 (数学領域) と支配方程式が満たされるべき物理的な部分領域 (物理領域) を分離して考えるという手法である。数学領域 Ω^M とは近似基底関数の定義域であり、解析対象を覆い尽くすように設定され、数学被覆 M_i と呼ばれる部分領域が重なり合うことによって形成されている。そして、物理領域 $\Omega^{[\alpha]}$ は数学被覆と物理領域の共通領域である物理被覆 $P_i^{[\alpha]}$ が重なりあうことによって形成されている。

FCM では、変位を規定するために次のような 2 つの関数を定義する。

$w_i(x, y)$: 重み関数

$u_i(x, y)$: 被覆関数

重み関数は、実際の物理形状とは無関係に数学領域内で定義され、数学被覆内では値を持つが、数学被覆外では零と

KeyWords : 有限被覆法, Eulerian 解法, 非構造格子

連絡先 : 〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27 E-mail: terasawa@civil.chuo-u.ac.jp

なるようなものであり以下のように表される.

$$\begin{aligned} w_i(x, y) &\geq 0 & (x, y) &\in M_i \\ w_i(x, y) &= 0 & (x, y) &\notin M_i \end{aligned}$$

一方, 被覆関数 u_i は, 数学被覆 M_i と物理領域 $\Omega^{[\alpha]}$ との共通領域である物理被覆 $P_i^{[\alpha]}$ ごとに定義され, 以下のように表される.

$$\begin{aligned} u_i(x, y) &\neq 0 & (x, y) &\in P_i^{[\alpha]} \\ u_i(x, y) &= 0 & (x, y) &\notin P_i^{[\alpha]} \end{aligned}$$

そして, 上記の重み関数 w_i と被覆関数 u_i を用いて, 全体変位関数が以下のように定義される.

$$u(x, y) = \sum_{i=1}^{N_M} w_i(x, y) u_i(x, y) \quad (8)$$

3. 数値解析例

数値解析例として, 大変形解析のベンチマーク問題である金属材料の棒の衝突解析を行った. 数値解析モデルは, 図-1 に示すように鋼材に対して鉛直下向きに初期速度 300m/s を与える. また, 材料特性は, バイリニア硬化型の J_2 流れ則を使用し, 初期降伏応力は 0.02GPa , ヤング率は 21.8GPa , ポアソン比は 0.28 , 密度は 1710kg/m^3 を仮定する. 有限被覆法を用いた本手法の有効性を検討するために, 四角形要素を用いた Lagrangian 有限要素法による解析結果を参照解とし, 比較検討を行う.

図-3 図-4 に Lagrangian 有限要素法, 有限被覆法による初期形状, $80\text{ }\mu\text{S}$ 後の変形形状及び相当塑性ひずみ分布の様子を示す. また, 図-5 に棒下端部での先端変位の時刻歴を示す. これらの結果より, 有限被覆法による解析は参照解である Lagrangian 有限要素解析とほぼ同等の変形挙動を捉えていることが分かる. また, 相当塑性ひずみの分布に関してもほぼ同等の分布を示していることが分かる. しかしながら, 棒の先端部の時刻歴より, 有限被覆法による解析は参照解である Lagrangian 有限要素解析に比べ変形が小さいことが分かる.

4. おわりに

本研究では, 固体の大変形解析のための高精度な数値解析手法の構築を目的として, 有限被覆法を用いる手法を提案した. 本手法の妥当性を検討するため, Lagrangian 有限要素法による結果との比較を行い以下の結論を得た.

- 有限被覆法を用いた本手法の計算結果は, Lagrangian 有限要素法による結果とほぼ同等の変形挙動および相当塑性ひずみの分布を示し, 本手法の妥当性が確認された.
- 棒の先端変位の比較においては, 有限被覆法を用いた本手法は Lagrangian 有限要素法による結果に比べて小さい結果となった. この点に関しては今後の検討課題としたい.

今後は, 固体境界に表面力が作用する解析を行い本手法の有効性を検討する予定である.

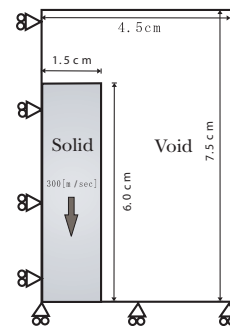


図-1 数値解析モデル

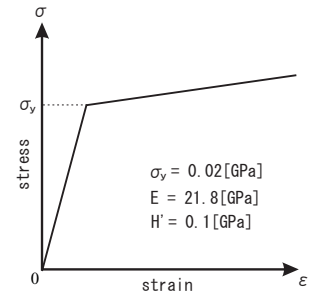


図-2 材料特性

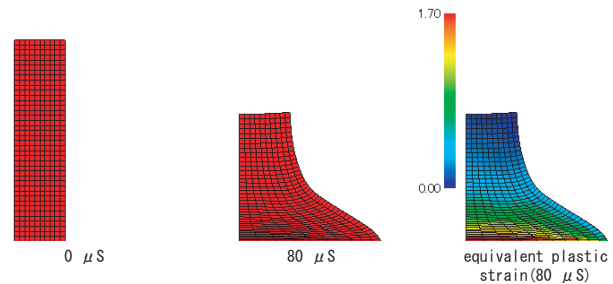


図-3 Lagrangian 有限要素法 (参照解)

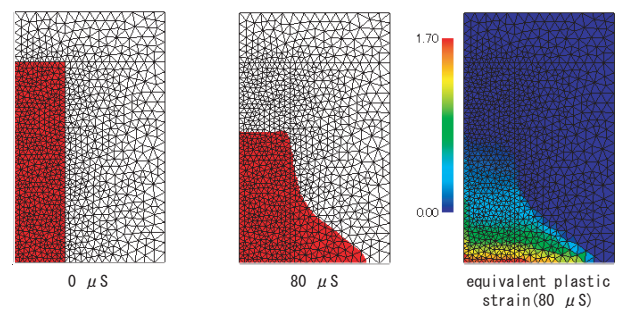


図-4 有限被覆法 (本手法)

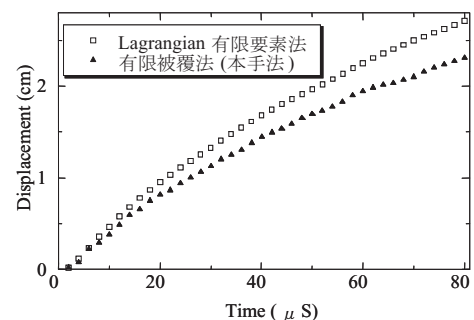


図-5 棒下端部の先端変位の時刻歴

参考文献

- 1) S.Okazawa, K.Kashiyama, Y.Kaneko: Eulerian formulation using stabilized finite element method for large deformation solid dynamics, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2007; 72: 1544-1559
- 2) 寺沢英之, 山田豊, 檜山和男, 岡澤重信: 三角形非構造格子による Eulerian 大変形固体解析, 土木学会年次学術講演会概要集 (CD-ROM), 62, 2007.
- 3) 車谷麻緒, 寺田賢二郎: 有限被覆法における一般化要素の近似性能に関する基礎的研究, 日本計算工学会論文集, 論文番号 20030027, 2003.
- 4) 田中伸厚: 数値流体力学のための高精度メッシュフリー手法の開発, 日本機械学会論文集 (B編), 64 巻 620 号, 1998.