

ペナルティ法を用いたひび割れ進展解析手法の構築

中央大学大学院 学生員 ○ 岩田 暁
中央大学 正会員 檜山 和男
東北大学大学院 正生員 車谷 麻緒
東北大学大学院 正生員 寺田 賢二郎

1. はじめに

構造物の破壊現象を数値解析により把握するためには、構造材料として広く用いられるコンクリートの力学的挙動を正確に評価する必要がある。コンクリートのような脆性材料でかつ非均質複合材料のひび割れ進展を解析するためには、母材・介在物の破壊や界面剥離が考慮できる解析手法が必要であり、車谷・寺田は静的問題においてFEMをベースとした簡易なひび割れ進展解析手法を提案している¹⁾。

本研究は、文献1)のひび割れ進展解析手法を動的問題に拡張することを目的としている。本論文では、その基礎的研究として、構造物を微小変形の2次元弾性体として扱い、界面にあらかじめ二重節点を配置し、その二重節点間の界面にペナルティ法を適用し、界面の剥離を追跡した。なお、有限要素としては定ひずみ三角形要素を用いた。

2. 数値解析手法

本論文では、2次元での微小変形を仮定し、線形弾性体の動的問題における定式化を示す。

(1) 基礎方程式

弾性体に基づく基礎方程式を以下に示す。

つりあい条件式

$$\partial^T \sigma - \rho \ddot{u} + b = 0 \quad (1)$$

変位-ひずみ関係式

$$\varepsilon = \partial u \quad (2)$$

応力-ひずみ関係式

$$\sigma = D\varepsilon \quad (3)$$

(2) ひび割れ進展解析手法

コンクリートなどの脆性材料や複合材料の解析に際しては、材料界面におけるひび割れなどの不連続変形をモデル化するために、図-1に示すように、材料界面やひび割れが発生する界面に二重節点を配置させ、界面における連続条件を次のように与える。

$$\begin{aligned} u^{[1]} &= u^{[2]} \\ t^{[1]} &= -t^{[2]} \quad \text{on } \Gamma_p \end{aligned} \quad (4)$$

ここで、 u は変位、 t は表面力、 Γ_p はひび割れの発生する界面、[1]、[2] はひび割れにより離れるそれぞれの要素を示す。界面での連続条件式(4)は、Lagrange 未定乗数 λ を用いて考慮することができる。本論文では、ペナルティ法を用いてLagrange 未定乗数を近似する。ペナルティ法で

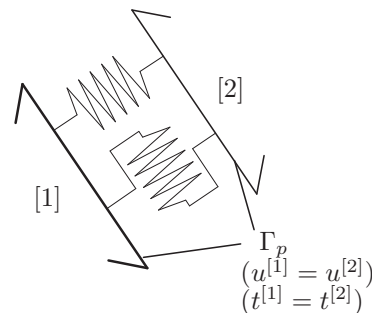


図-1 材料界面

は、Lagrange 未定乗数 λ を次の式(5)のように置く。

$$\lambda = p(u^{[1]} - u^{[2]}) \quad \text{on } \Gamma_p \quad (5)$$

ここで、 p はペナルティ係数である。

(3) 弱形式

ペナルティ法を適用した場合の弱形式は、通常の弾性体の弱形式にペナルティ係数による剛性が加わったものとなり、次の式(6)のように表される。

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\partial u^*)^T D (\partial u) d\Omega + \int_{\Gamma_p} (u^{*[1]} - u^{*[2]}) p (u^{[1]} - u^{[2]}) d\Gamma_p \\ + \int_{\Omega} \rho \ddot{u} u dV = \int_{\Omega} u^{*T} b d\Omega + \int_{\Gamma_t} u^{*T} \bar{t} d\Gamma_t \end{aligned} \quad (6)$$

ここで、 D は弾性係数行列、 b は物体力ベクトル、 t は外力ベクトル、 Ω は全体領域、 Γ_t は Neumann 境界である。

(4) 有限要素方程式

式(6)に対して、空間方向、時間方向の離散化を行うと以下の式(7)が得られる。時間方向の離散化には中心差分を用いた動的陽解法を用いる。

$$\overline{M} \ddot{u}^n + F_{int}^n = F_{ext}^n \quad (7)$$

F_{int} 、 F_{ext} は内力項、外力項を表し、 F_{int} については以下の式で表せる。

$$F_{int} = (K + P) u \quad (8)$$

ここで、 K と P はそれぞれ剛性行列、ペナルティ行列、 $\overline{M}$ は集中質量行列を表す。式(7)に対して、中心差分を適用させると時刻 t^{n+1} の位置ベクトル x^{n+1} 及び、時刻 $t^{n+\frac{1}{2}}$ の速度ベクトル $\dot{u}^{n+\frac{1}{2}}$ は、次式のように求めることができる。

$$x^{n+1} = x^n + u^{n+\frac{1}{2}} \Delta t \quad (9)$$

$$\dot{u}^{n+\frac{1}{2}} = \dot{u}^{n-\frac{1}{2}} + \ddot{u}^n \Delta t \quad (10)$$

このとき、加速度ベクトル $\ddot{u}^n$ は、式(7)より求まる。

KeyWords： 有限要素法、亀裂進展、ペナルティ法

連絡先： 〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27 TEL 03-3817-1815 Email iwata@civil.chuo-u.ac.jp

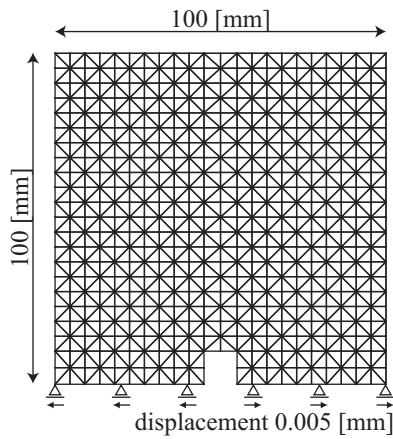


図-2 解析モデル

Young's modulus	20[GPa]
Poisson's ratio	0.3
Penalty parameter	$E \times 10^5$ [GPa]
Interface	1.2[MPa]

表-1 解析条件

(5) 界面剥離の判定

界面の剥離の発生については、界面での表面力を用いて評価する。本論文では、Lagrange 未定乗数 λ をペナルティ法を用いて近似しているため、界面での表面力 t_p は次の式(11)で求められる。

$$t_p = \lambda = p(u^{[1]} - u^{[2]}) \quad (11)$$

この表面力 t_p と外向き法線ベクトル n を用いて次の式(12)を満たした場合に界面剥離が発生するとした。

$$\begin{aligned} t_p \cdot n &> 0 \\ \|t_p\| &\geq t_s \end{aligned} \quad (12)$$

ここで、 t_s は引張強度を示す。

3. 数値解析例

次の数値解析例を通して、ひび割れ進展解析手法の妥当性、有効性を検証する。数値解析例として、静的、動的解析における界面の剥離についての検証を行う。

(1) 静的解析における検証

図-2 に示す構造物を解析対象として、x 方向の中心ラインに二重節点を配置し、下端に強制変位を与える。増分ステップを 20 ステップとし、増分载荷を繰り返す、二重節点間の界面剥離の進展を追跡する。材料定数は表-1 に示す。

解析結果として、ひび割れ進展を含む変形図と相当応力分布を図-3、変位に対する支点反力のグラフを図-4 に示す。図-3 から、载荷が進むにつれて、変形の大きい下部から界面剥離が発生していることが分かる。また、図-4 から、界面剥離が発生した荷重ステップ 5/20 で反力が低下していることが分かる。その後も徐々に界面剥離の進行とともに反力が低下していることが見て取れる。これより、静的解析での界面の剥離に対して、妥当な結果を得ることができたと考える。

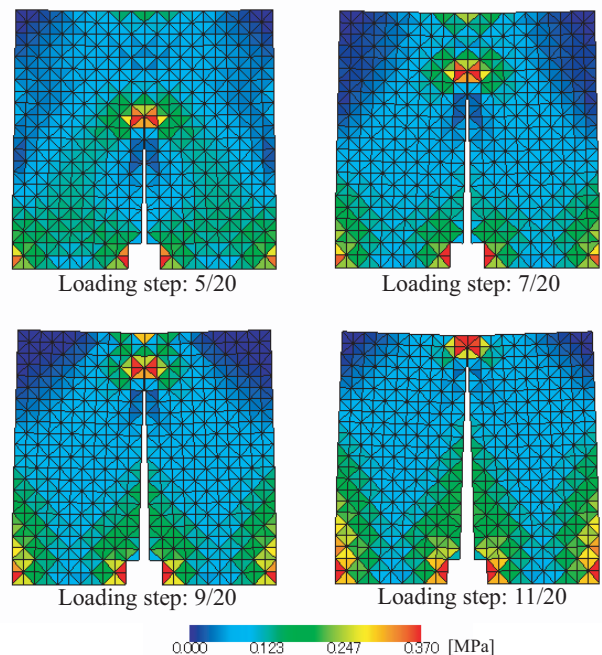


図-3 ひび割れの進展と相当応力分布

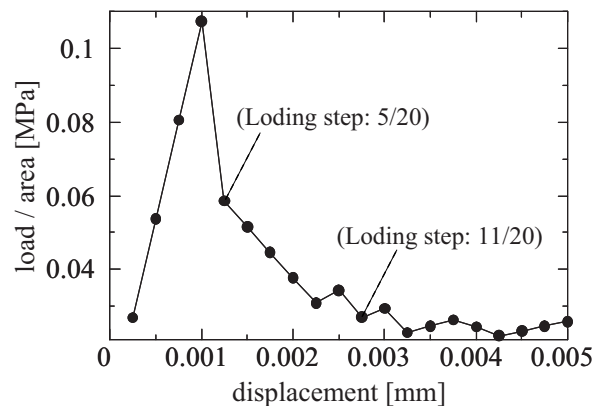


図-4 変位に対する支点反力

(2) 動的解析における検証

静的解析と同様に図-2 に示す構造物を解析対象として、x 方向の中心ラインに二重節点を配置させ、下端に初期速度を与える。界面剥離に伴う変形、応力分布、界面剥離の進展速度を静的解析と比較する。

なお、解析結果及び、考察に関しては、講演時に示す。

4. おわりに

本論文では、コンクリートや岩盤などの脆性材料の動的ひび割れ進展解析手法の構築を行った。今後、ひび割れ先端における力学挙動をより正確に評価するために、Cohesive crack モデルを導入する予定である²⁾。

参考文献

- 1) 車谷真緒, 寺田賢二郎: 節点積分有限要素法を応用した簡易な FEM ベースのひび割れ進展解析手法, Transactions of JSCES, Vol.2008, 20080002, 2008.
- 2) 車谷麻緒, 寺田 賢二郎: Cohesive crack モデルに対する陽的近似アルゴリズムの提案とその性能評価, 土木学会論文集 A, 投稿中.
- 3) 竹内則雄, 草深守人, 武田洋, 佐藤一雄, 川井忠男: ペナルティを用いたハイブリッド型モデルによる離散化極限解析, 構造工学論文集 Vol.46A, p261-270, 2000.