

一様な流れ場に設置された井戸内外の流速場に関する研究

中央大学理工学部 学生員 佐藤 智宏  
 中央大学大学院 フェロー会員 江花 亮  
 中央大学理工学部 フェロー会員 山田 正

1.はじめに

山地流域,都市河川,盆地等における降雨の流出機構や水循環過程の物理機構を解明する上で流域内の土壌特性と浸透速度,地下水流速の関係を把握することは非常に重要である.しかしながら地下水流速の実測値とダルシー則から算出された値に1~2桁程度の差が生じることは珍しくない.その原因の一つとして地下水流脈(「水ミチ」)が考えられている.本研究は飽和土中に存在する「水ミチ」が周りの流速場に与える影響を定量的に評価することが目的であり,飽和土中に開けられた井戸を「水ミチ」のモデルとし,その周りの流速場をポテンシャル流理論と等角写像を用いて解析を行い,理論解と実験値との比較を行ったものである.

2.円形井戸内外流速場の設定と解析

飽和土層中に設置された円形の井戸を図-1のようにモデル化する.図中の円が井戸内外の境界であり,井戸の中心にデカルト座標,円筒座標の原点が置かれるように設置する.井戸内外でダルシー則を適用するとx,y方向の流速u,vは

$$u = -k \frac{\partial h}{\partial x} \quad (1), \quad v = -k \frac{\partial h}{\partial y} \quad (2)$$

となり,x-y座標系における連続式は式(3)となる.なお各変数は井戸の内と外で区別していない.

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = \nabla^2 h = 0 \quad (3)$$

解析対象は円形井戸であるため以下ではr-θの円筒座標系を用いる.式(3)を円筒座標表示にすると式(4)となる.

$$\nabla^2 h = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial h}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 h}{\partial \theta^2} = 0 \quad (4)$$

この方程式を水頭について解くと式(5),(6)が得られる.

$$h^i(r, \theta) = (a^i_0 + b^i_0 \ln r)(c^i_0 \theta + d^i_0) + \sum_{n=1}^{\infty} (a^i_n r^n + b^i_n \frac{1}{r^n})(c^i_n \sin n\theta + d^i_n \cos n\theta) \quad (5)$$

$$h^o(r, \theta) = (a^o_0 + b^o_0 \ln r)(c^o_0 \theta + d^o_0) + \sum_{n=1}^{\infty} (a^o_n r^n + b^o_n \frac{1}{r^n})(c^o_n \sin n\theta + d^o_n \cos n\theta) \quad (6)$$

h<sup>i</sup>,h<sup>o</sup>はそれぞれ井戸の内側の水頭,外側の水頭を表す.以降,添え字のi,oはそれぞれ井戸の内側,外側を表す.式(5),(6)に含まれる各項の係数を決定していく計算条件は以下の5つとする.1)流れはx軸に関して対称,2)井戸から十分離れたところでのx軸方向流速はUに等しい,3)井戸の内側には特異点は存在しない,4)井戸の境界(r=a)において井戸の内外の水頭の連続,5)井戸の境界で境界に垂直方向の流速の連続性の保証.これらの条件を用いると最終的に式(5),(6)は式(7),(8)のように井戸内外の水頭の関数が求まる.

$$h^i(r, \theta) = -\frac{2}{k_i + k_o} U r \cos \theta = -\frac{2}{k_i + k_o} U x \quad (7), \quad h^o(r, \theta) = -\frac{U}{k_o} \left( r + \frac{k_o - k_i}{k_o + k_i} \frac{a^2}{r} \right) \cos \theta \quad (8)$$

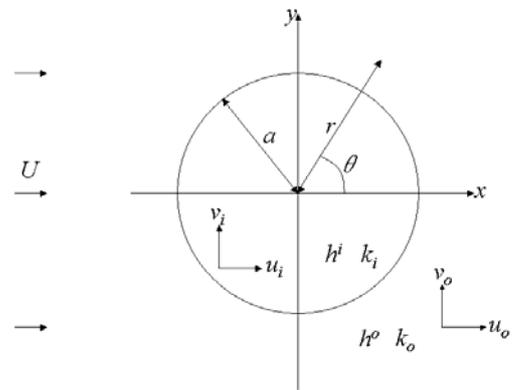


図-1 井戸周りの一様流と変数の定義図

- U: 井戸外一様流速(見かけの流速) a: 井戸半径
- u<sub>i</sub>: 井戸内x方向流速 u<sub>o</sub>: 井戸外x方向流速
- v<sub>i</sub>: 井戸内y方向流速 v<sub>o</sub>: 井戸内y方向流速
- h<sub>i</sub>: 井戸内水頭 h<sub>o</sub>: 井戸外水頭
- k<sub>i</sub>: 井戸内飽和透水係数 k<sub>o</sub>: 井戸外飽和透水係数

キーワード 速度ポテンシャル, 流線関数, ダルシー則, 等角写像, Joukowski 変換

連絡先 〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27 中央大学理工学部 TEL:03-3817-1807 FAX:03-3817-1803

3. 流れの特性と考察

井戸内x方向流速を考える．これまでの計算では井戸中は透水係数 $k_i$ の土層で満たされているとしており $k_o$ と $k_i$ の大小関係は考慮してこなかった．しかし実際の井戸は水で満たされており，井戸内部は外部に比べて非常に流れやすく $k_i$ は $k_o$ に比べて十分大きいとして $k_i \gg k_o$ とおくと井戸内x方向流速は

$$u^i(x, y) = -k_i \frac{\partial h^i}{\partial x} = k_i \frac{2}{k_i + k_o} U = \frac{2U}{\frac{k_o}{k_i} + 1} \rightarrow 2U \quad (9)$$

となる．つまり， $k_i$ が $k_o$ に比べて十分大きいとき円形井戸の井戸内流速は井戸外流速の2倍の大きさになることがわかる．つづいて井戸内外の流線型状を見るためにr方向の流速 $u_r$ と流線関数 との関係式

$$u_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \quad (10)$$

を用いて井戸内外の流線関数を求めると

$$\psi^i = \frac{2k_i}{k_i + k_o} U r \sin \theta = \frac{2k_i}{k_i + k_o} U y \quad (11) \quad , \quad \psi^o = U \left( r - \frac{k_o - k_i}{k_o + k_i} \frac{a^2}{r} \right) \sin \theta \quad (12)$$

となる．**図-2**に井戸内外の流線図を示す．井戸の半径は1であり， $k_i \gg k_o$ とおいた場合の流線図である．この図から井戸が円形の場合，井戸の中心から半径の2倍程度離れたところまでの流線が井戸内に引き込まれ，式(9)で得られたように井戸内流速は井戸外一様流速の2倍となることが確認できる．式(10)(11)を用いて $k_i$ と $k_o$ の値の差がそれほど大きくない場合も調べると $k_i = k_o$ の場合，井戸外の流線は全く吸い込まれず $k_i$ が $k_o$ に比べて大きくなるほど井戸内への吸い込みは大きくなり， $k_i$ が $k_o$ に比べて十分に大きな値になると**図-2**のように井戸内流速は井戸外一様流速の2倍に収束することがわかった．

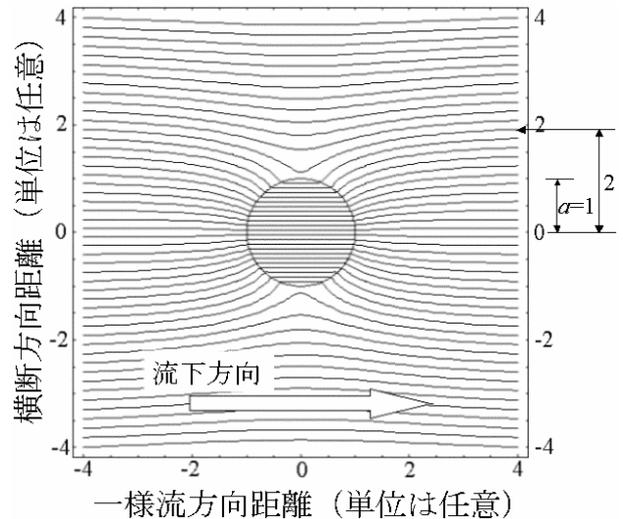


図-2 一様流中に置かれた円形井戸内外の流線図 ( $k_i \gg k_o$ の場合)

4. Helle-Shaw流れ実験による流線型状の実験的検証

従来から多くの研究者により地下水の2次元的なポテンシャル流れを模擬するために Helle-Shaw 流れの模擬実験が行われてきた．Helle-Shaw 流れとは，小さな間隔があげられた平行な2枚のガラス板の間を粘性流体が圧力勾配のもとで発生する定常的な流れのことをいう．本研究では**図-3,4**のように小さな間隔をあけて置かれた二枚板の中央に井戸に見立てた円孔をあけた実験装置を作成し，アルミの粉をトレーサーとして流況を調べた．装置内の井戸に見立てた円孔周りの流線を調べると**図-5**の(a),(b)のようになる．実験から得られた流線図と解析から得られた流線図を比較すると井戸外の流線は井戸に近づくと内部へと引き込まれ，井戸を通り過ぎると再び井戸から離れるように流線が描かれるという類似点を見ることができた．

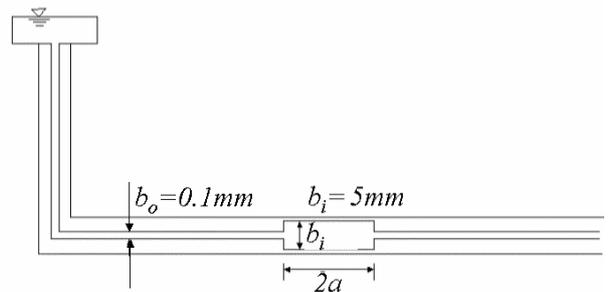


図-3 実験装置縦断面図

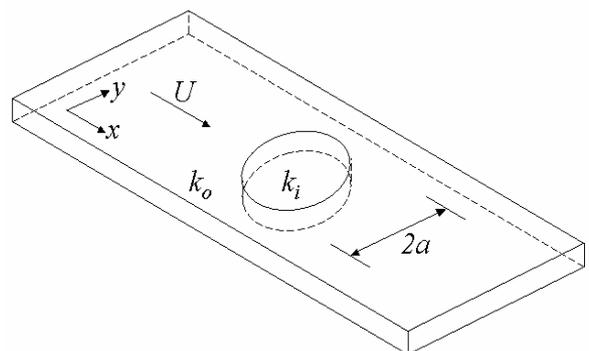


図-4 Helle-Shaw 流れ実験装置図

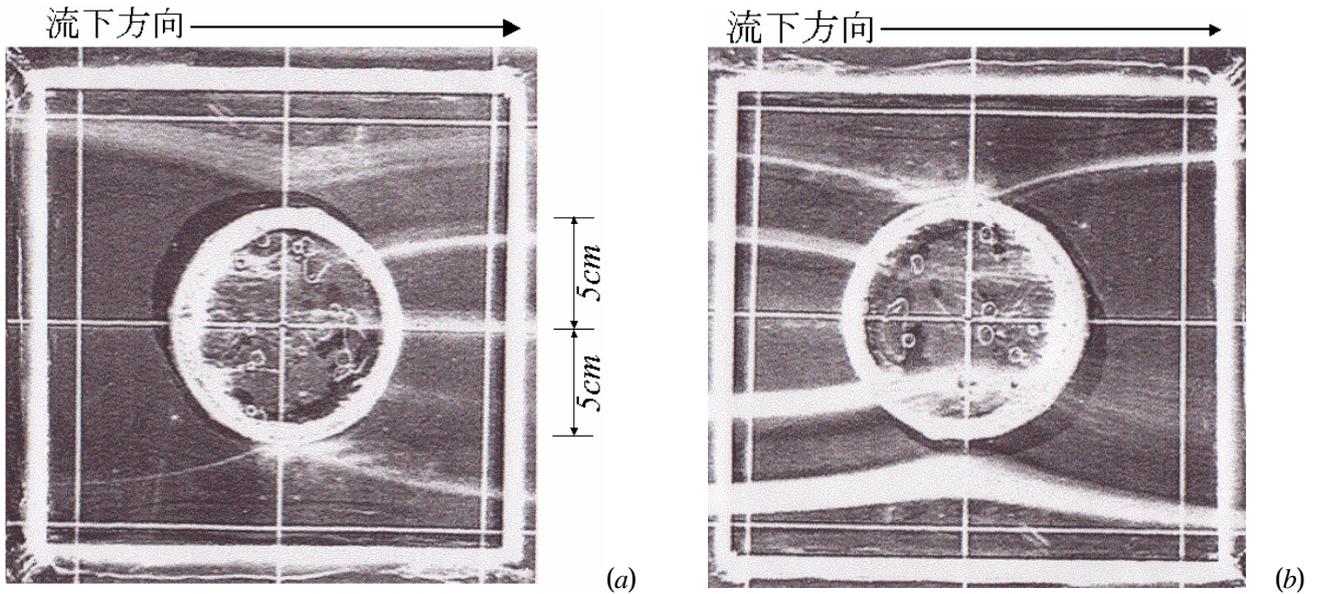


図-5 Helle-Shaw 流れ実験によって得られた円井戸周りの流線形状

5. 楕円型井戸周りの流速場の特性と考察

円形井戸を等角写像論の Joukowski 変換を用いて「水ミチ」のモデルとしての楕円形井戸へ写像を行い楕円井戸周りの解を得ることができる。Joukowski 変換

$$z = \zeta + \frac{c^2}{\zeta} \quad (13)$$

を用いることで  $\zeta$ -平面上の円形井戸を  $z$ -平面上の楕円形井戸に等角写像することができる。式(13) を についでに式に書き直すと

$$\zeta = \xi + i\eta = \frac{z \pm \sqrt{z^2 - 4c^2}}{2} \quad (z=x+iy) \quad (14)$$

この変換式によって得られる  $\zeta$ -平面の実部  $= (\xi, \eta)$ と虚部  $= (\xi, \eta)$ を円形井戸外の流線関数

$$\psi^o = U \left( r + \frac{a^2}{r} \right) \sin \theta = U \left( \eta + \frac{a^2 \eta}{\xi^2 + \eta^2} \right) \quad (r = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}, \sin \theta = \frac{\eta}{r}) \quad (15)$$

に代入することで楕円形の井戸外における流線関数

$$\psi^o = U \left\{ \operatorname{Im} \left[ \frac{z \pm \sqrt{z^2 - 4c^2}}{2} \right] + \frac{a^2 \operatorname{Im} \left[ \frac{z \pm \sqrt{z^2 - 4c^2}}{2} \right]}{\left( \operatorname{Re} \left[ \frac{z \pm \sqrt{z^2 - 4c^2}}{2} \right] \right)^2 + \left( \operatorname{Im} \left[ \frac{z \pm \sqrt{z^2 - 4c^2}}{2} \right] \right)^2} \right\} \quad (16)$$

が得られる。なお、本研究では井戸内流速が井戸外の一様流速に比べてどれほどの速さをもっているかが判れば十分である。つまり、井戸からどれだけ離れた流線が井戸内に引き込まれているかがわかれば井戸内の流速は井戸外一様流速に対してどれほどの流速で流れているかが判るので、井戸外の流線関数のみ等角写像を行う。

流線関数(16)によって得られる流線図を長軸・短軸の長さで2つのパターンにわけて示すと、図-6のようになる。図-6からもわかるように、一様流方向に細長い楕円井戸の場合、井戸内流速は井戸外一様流速の2倍以上で(a)の場合では約3.5倍となり、一様流方向に極端に細長い楕円井戸(b)の場合、井戸内流速は一様流速のおよそ100倍になる。つまり、流れ方向に細長い楕円の井戸は厚み比(短軸長/長軸長)が小さくなればなるほど楕円から遠く離れた流線を引き込み、井戸内の流速が早くなる。

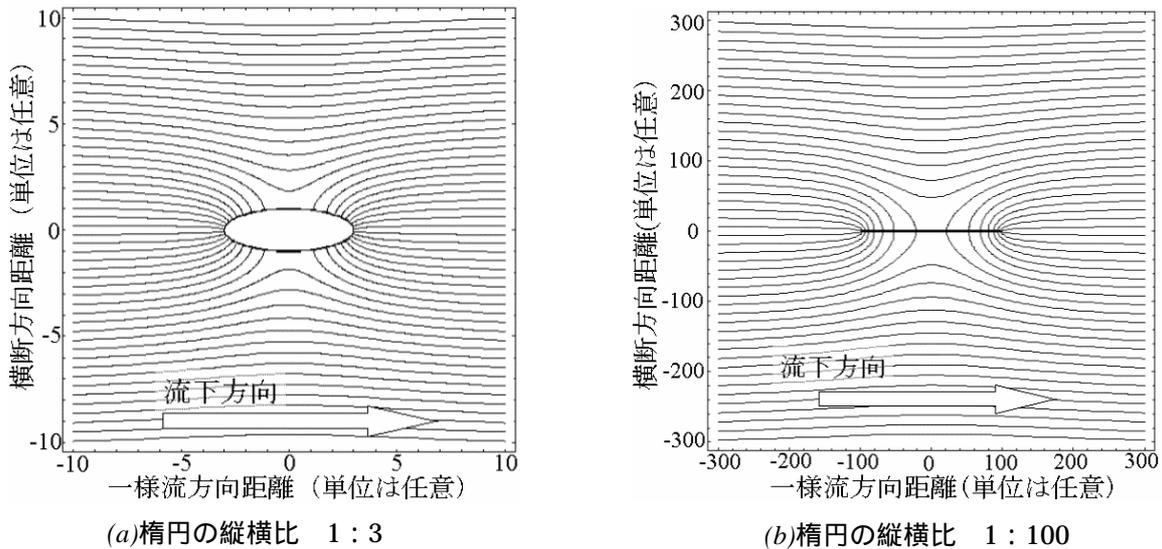


図-6 井戸外一様流れに平行に細長い楕円周りに生じる流れの流線図。  
 (ここで(a)の楕円の縦横比は1:3, (b)の楕円の縦横比は1:100とする。)

しかし実際には物理的に考えて井戸内流速には上限値があり、ある値に収束すると考えられる。図-7に楕円(円)の縦横比とその変化によって生じる井戸内流速の変化を示す。グラフの横軸が1以上の領域は一様流方向に細長い楕円井戸, 1以下の領域は一様流に垂直な楕円井戸を表す。縦軸は井戸内流速と井戸外一様流速の比を表している。一様流方向に極端に細い楕円井戸を水ミチのモデルととらえると得られた結果から、水ミチが存在することで水ミチ外の一様流は水ミチ内に引き込まれ、流速は10~100倍程度大きくなること理論的に示すことができた。これにより水ミチが地下水流出に与える影響の大きさを理論的に示すことができた。

6.まとめ

- 1) 円形井戸内の流速は周辺一様流速(見かけの流速)の2倍となることが解析的に示された。
- 2) 楕円井戸の解が等角写像により得られ、一様流に平行に細長い楕円井戸では、井戸が細長くなるほど井戸内流速は速くなり、井戸外一様流速の2倍以上の値を示すことが理論的に示すことができた。
- 3) 一様流に垂直に細長い楕円井戸では井戸内流速は楕円が細くなればなるほど円形井戸内流速よりも遅くなり、厚み比(短軸長/長軸長)が小さくなるにしたがって井戸内流速は井戸外一様流速に漸近する。

参考文献

- 1) 今井 功:流体力学(前編), 裳華房, 1973.
- 2) Landau, L.D., Lifshitz, E.M.: Fluid Mechanics 2nd edition, Butterworth-Heinemann, 1959.
- 3) 佐々木達治郎:等角写像の応用, 現代工学社, 1974.
- 4) 今井 功:等角写像とその応用, 岩波書店, 2001.
- 5) 日野幹雄:流体力学, 朝倉書店, 1997.

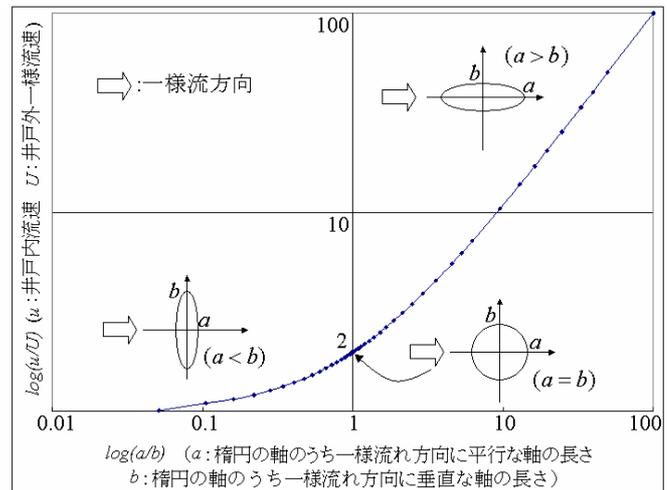


図-7  $a/b$  ( $a$ :楕円の軸のうち一様流れ方向に平行な軸の長さ  $b$ :楕円の軸のうち一様流れ方向に垂直な軸の長さ)と  $u/U$  ( $u$ :井戸内流速  $U$ :井戸外一様流速)の関係。