

## 水路湾曲部における波の波形変化に関する研究

中央大学	正会員	山田 拓也
(株)エコー	正会員	原 信彦
中央大学	フェロー会員	山田 正

## 1. 研究背景及び目的

津波や潮汐変化に伴う潮汐段波の河川遡上など、河川を伝播する波動現象は河川管理上非常に重要な問題である。特に河川狭窄部や湾曲部では、遡上した波の波高が増大し、堤防への被害や堤防からの越流に伴う内陸での氾濫などが懸念される。一方で、従来の河川管理や津波対策を見てみると、河川を遡上する津波などの波動現象を考慮した対策を施している河川は見られず、津波が河川を遡上して予想もしない地域において氾濫を引き起こす事態に対する想定はあまり行われてきていない。

幸い戦後発生した津波事例においては津波の河川遡上に伴う二次災害は発生していないが、1854年に発生した安政南海地震では大阪湾北部の木津川及び安治川を津波が遡上し、死者341名、橋の破損被害24余り、多数の船の被害、道頓堀や土佐堀からの越流に伴う市中での氾濫などの被害記録が残されており<sup>1)</sup>、従って河川を遡上する津波の変形や波高増大に関する研究は工学的に重要であると考えられる。

本研究では、河川を遡上する津波現象として、水路湾曲部を伝播する孤立波の水位上昇特性を数値計算を用いて解析し、湾曲の鋭さや入射波波形が湾曲部外周壁上における水位上昇に与える影響を解明する事を目的とする。

## 2. 既存研究

湾曲部を伝播する波に関する既存研究を見ると、主に音響学の分野で研究が行われており、Rostafinski<sup>2)</sup>は湾曲部を有するダクト内を伝播する長波長音波の速度ポテンシャル解を導出し、ダクト幅の狭い(極限としてダクト幅が0となる)湾曲部を伝播する長波長の波動はダクトの湾曲の影響を受けないという、本研究が目指す湾曲部を伝播する波動の水位上昇特性の水理学的解明に関しても非常に重要な結果を得ている。

水面波の伝播に関してはA.shiら<sup>3)</sup>は直角屈折水路における水路幅の違いに伴う孤立波波形の入射波の透過・反射に関する研究を行い、水路幅が小さい場合には、入射波のプロファイルを保持し波が直角屈折部を透過するが、水路幅が大きくなるに従い、反射波が大きくなることを示した。

さらに、水面波の湾曲部通過に伴う水位上昇に関して、由比ら<sup>4)</sup>は一定水深湾曲水路を伝播する浅海孤立波の湾曲部外周壁上における最大水位変位の変化に着目した波動伝播数値計算を行い水路幅が大きく、また波の非線形性が強いほど大きくなり、水面変位の最大値は入射孤立波の2倍に達することを示している。

これらは屈折・湾曲形状や水路幅が波の伝播速度、入射波の質量エネルギーの透過及び反射率に与える影響に関する

研究であり、また、湾曲部を伝播する孤立波の水位上昇に着目した由比らの研究では、その主眼は水路幅の違いに伴う水位変位に置かれており、湾曲の鋭さなどを含む水路形状が波の伝播に伴う湾曲部における水位上昇への影響に関する知見は見られない。本研究では、水路の湾曲形状を水路外周での曲率半径及び水路幅を用いて定め、様々な水路形状が波の通過に伴う最大水位上昇に与える影響を解析する。

## 3. 直交曲線座標系における2次元不定流方程式の導出

流体運動を理論的、数値的に解析する場合、解析空間は複雑な地形形状を有する場合が多い。このような場合、デカルト座標系に基づき矩形メッシュを作成して解析することは、物理現象を正しく捉えられず、解析上も境界条件の設定が非常に複雑になるため解析手法として有効ではない。

このような背景から、本研究ではテンソル解析を用いて任意の地形に沿う一般化座標系への座標変換をおこない、河川形状の空間変化を考慮した座標系(以下、直交曲線座標系と記す)における波動現象の解析を行う。テンソル表記のオイラー方程式及び連続式は次式で表される。

$$\frac{\partial \tilde{u}^i}{\partial t} + \tilde{u}^j \cdot \tilde{u}_{,j}^i = -\frac{1}{\rho} \tilde{G}^{ij} p_{,j} - g \tilde{G}^{ij} \frac{\partial x^3}{\partial \tilde{x}^j} \quad (1)$$

$$\tilde{u}_{,j}^j = 0 \quad (2)$$

$\tilde{x}^i = (s_a, n_a, z_a)$  は直交曲線座標系、 $x^i = (x^1, x^2, x^3) = (x, y, z)$  はデカルト座標、 $\tilde{u}^i$  は*i*方向流速のテンソル成分、下付及び下付の添字は各々テンソルの共変成分、反変成分を表す。 $\rho$ は密度、 $g$ は重力加速度、 $\tilde{G}^{ij}$ は共変計量テンソル、 $L$ は蛇行長、下付添字 $;$ はテンソル演算の共変微分であり、式(1)の全項は反変テンソル成分で表記されている。

直交曲線座標系の概要及び変数定義を図-1に、直交曲線座標系とデカルト座標の関係式を式(3)、(4)、(5)に示す。

$$x^1 = \left( \int_0^{s_a} \cos \theta ds_a - n_a \sin \theta \right) \cos \alpha + z_a \sin \alpha \quad (3)$$

$$x^2 = \int_0^{s_a} \sin \theta ds_a + z_a \cos \alpha \quad (4)$$

$$x^3 = - \left( \int_0^{s_a} \cos \theta ds_a - n_a \sin \theta \right) \sin \alpha + z_a \cos \alpha \quad (5)$$

直交曲線座標系の場合、座標を一意に定める変数は流路中心線を定める従属変数 $\theta(s_a)$ であり、デカルト座標と直交曲線座標の関係式(3)、(4)、(5)を座標として採用しても、実際の河川形状は未だ定まっていない。

まず、テンソル表記のオイラー方程式及び連続式(1)、(2)にデカルト座標系と直交曲線座標系との関係式(3)、(4)、(5)

を適用して、テンソル成分から物理成分へと変換することで、河川形状に沿う直交曲線座標系におけるオイラー方程式及び連続式を導出する。

次に直交曲線座標系における2次元不定流方程式を導出する。この2次元不定流方程式の導出においては、谷線と水平の基準線のなす角を  $\alpha = 0$  と設定し、さらに河床は平坦床として設定している。また、2次元不定流方程式の導出における境界条件は、水面における幾何学的条件 (6)、河床においては平坦床の境界条件 (7) を適用している。

$$u_z = \frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{u_s}{1 - n_a \frac{d\theta}{ds_a}} - u_n \frac{\partial \eta}{\partial n_a} \quad (6)$$

at  $z_a = \eta(s_a, n_a, z_a)$

$$u_z = 0 \quad \text{at } z_a = 0 \quad (\text{平坦床}) \quad (7)$$

ただし、 $u_s, u_n, u_z$  は、テンソル成分から物理成分へと変換した直交曲線座標系での  $s_a, n_a, z_a$  方向流速である。

$z_a$  方向のオイラー方程式を用いて、静水圧近似を仮定し次式を得る。

$$p = \rho g \{ \eta(t, s_a, n_a) - z_a \} \quad (8)$$

このとき、 $s_a, n_a$  方向のオイラー方程式及び連続式を  $z_a$  方向に断面積分を行い流下方向及び横断方向の流量フラックス  $M, N$  を用いて書き直し、以下の3式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial t} + \frac{1}{\left(1 - n_a \frac{d\theta}{ds_a}\right)} \frac{\partial}{\partial s_a} \left( \frac{\beta_1 M^2}{\eta} \right) + \frac{\partial}{\partial n_a} \left( \frac{\beta_2 MN}{\eta} \right) \\ - \frac{2\beta_2 MN}{\eta \left(1 - n_a \frac{d\theta}{ds_a}\right)} \frac{d\theta}{ds_a} - g\eta \cos \theta \sin \alpha \\ + g\eta \cos \alpha \frac{1}{\left(1 - n_a \frac{d\theta}{ds_a}\right)} \frac{\partial \eta}{\partial s_a} = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial N}{\partial t} + \frac{1}{\left(1 - n_a \frac{d\theta}{ds_a}\right)} \frac{\partial}{\partial s_a} \left( \frac{\beta_2 MN}{\eta} \right) + \frac{\partial}{\partial n_a} \left( \frac{\beta_3 N^2}{\eta} \right) \\ - \frac{1}{\left(1 - n_a \frac{d\theta}{ds_a}\right)} \left( \frac{\beta_1 M^2 - \beta_3 N^2}{\eta} \right) \frac{d\theta}{ds_a} \\ + g\eta \sin \theta \sin \alpha + g\eta \cos \alpha \frac{\partial \eta}{\partial n_a} = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{1}{\left(1 - n_a \frac{d\theta}{ds_a}\right)} \frac{\partial M}{\partial s_a} - \frac{N}{\left(1 - n_a \frac{d\theta}{ds_a}\right)} \frac{d\theta}{ds_a} + \frac{\partial N}{\partial n_a} = 0 \quad (11)$$

ただし、 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  は運動量補正係数、 $\eta$  は全水深である。また式 (9)、(10) の左辺第4項は各々遠心力の効果を表している。流下方向、横断方向流量フラックス  $M, N$  は、次式により定義されている。

$$M(t, s_a, n_a) = \int_0^\eta u_s(t, s_a, n_a, z_a) ds_a \quad (12)$$

$$N(t, s_a, n_a) = \int_0^\eta u_n(t, s_a, n_a, z_a) dn_a \quad (13)$$

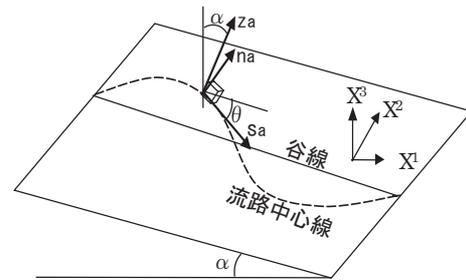


図-1 河川形状に適合する直交曲線座標系の設定図

#### 4. 直交曲線座標系における波動方程式の導出

直交曲線座標系における波動方程式の導出では、流下方向及び横断方向流量フラックス表示の断面積分型運動方程式 (9)、(10) 及び連続式 (11) を用いる。簡単のため、運動量補正係数は  $\alpha, \beta, \gamma$  は1とし、河床は平坦床とした。式 (3)、(4)、(5) を用いて河川に沿う座標系を設定すると、流れがポテンシャルフローの場合、流下方向軸及び横断方向軸は各々、流線及び等ポテンシャル線である。従って、実際の河川の流れも座標軸の取り方により流線である流下方向軸からのズレは小さいとし、運動方程式 (9)、(10) の移流項及び遠心力項の横断方向流量フラックスは無視する。また、蛇行河川において生じる波の振幅は微小であるとして水面勾配項以外の水位 (全水深  $\eta$  は静水深  $h$  で代替し、方程式中の遠心力項を除き線形化する。以上より式 (9)、(10)、(11) から式 (14)、(15)、(16) を得る。

$$\frac{\partial M}{\partial t} + gh \frac{1}{\left(1 - n_a \frac{d\theta}{ds_a}\right)} \frac{\partial \eta}{\partial s_a} = 0 \quad (14)$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \frac{1}{\left(1 - n_a \frac{d\theta}{ds_a}\right)} \frac{d\theta}{ds_a} \left( \frac{M^2}{h} \right) + gh \frac{\partial \eta}{\partial n_a} = 0 \quad (15)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{1}{\left(1 - n_a \frac{d\theta}{ds_a}\right)} \frac{\partial M}{\partial s_a} - \frac{N}{\left(1 - n_a \frac{d\theta}{ds_a}\right)} \frac{d\theta}{ds_a} + \frac{\partial N}{\partial n_a} = 0 \quad (16)$$

横断方向の運動方程式 (15) には左辺第2項に遠心力項が存在し、これにより河川蛇行部を伝播する波に遠心力の影響が生じる。式 (14)、(15)、(16) を用いて任意の河川において遠心力の影響を考慮した波動方程式を導出する。

まず流下方向運動方程式 (14) を流下方向軸  $s_a$  で1階微分し、次に横断方向運動方程式 (15) を横断方向軸  $n_a$  で1階微分する。さらに、連続式 (16) を時間の独立変数  $t$  で1階微分し、上記の2式を代入すると遠心力の影響を考慮した波動方程式 (17) を得る。

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - gh \frac{1}{\left(1 - n_a \frac{d\theta}{ds_a}\right)^2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial s_a^2} - gh \frac{\partial^2 \eta}{\partial n_a^2} \\ - gh \frac{n_a}{\left(1 - n_a \frac{d\theta}{ds_a}\right)^3} \frac{d^2 \theta}{ds_a^2} \frac{\partial \eta}{\partial s_a} + gh \frac{1}{\left(1 - n_a \frac{d\theta}{ds_a}\right)} \frac{d\theta}{ds_a} \frac{\partial \eta}{\partial n_a} \\ - \frac{1}{h \left(1 - n_a \frac{d\theta}{ds_a}\right)} \frac{d\theta}{ds_a} \frac{dM^2}{dn_a} = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

さらに式 (17) 左辺第 6 項の遠心力項を全水深  $\eta$  を用いて表記する．蛇行河川で生じる波は水深に比べて波長が十分長い長波であると考え，長波の振幅と流量の関係式を用いる．

$$\frac{M}{h} = \sqrt{gh} \frac{(\eta - h)}{h} \quad (18)$$

式 (18) を式 (17) の遠心力項に代入すると，河川蛇行部における遠心力の影響を考慮した波動方程式 (19) を得る．

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - gh \frac{1}{\left(1 - n_a \frac{d\theta}{ds_a}\right)^2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial s_a^2} - gh \frac{\partial^2 \eta}{\partial n_a^2} \\ & - gh \frac{n_a}{\left(1 - n_a \frac{d\theta}{ds_a}\right)^3} \frac{d^2 \theta}{ds_a^2} \frac{\partial \eta}{\partial s_a} + gh \frac{1}{\left(1 - n_a \frac{d\theta}{ds_a}\right)} \frac{d\theta}{ds_a} \frac{\partial \eta}{\partial n_a} \\ & - \frac{g}{\left(1 - n_a \frac{d\theta}{ds_a}\right)} \frac{d\theta}{ds_a} \left( \frac{d\eta^2}{dn_a} - 2h \frac{d\eta}{dn_a} \right) = 0 \quad (19) \end{aligned}$$

式 (19) は河川蛇行部における遠心力の影響を考慮した波動方程式であるが，未だ座標系を確定していないため，実在の河川の形状を座標系として設定することで様々な河川に適用することが出来る極めて一般的な波動方程式である．

### 5. 数値計算手法及び環境設定

直交曲線座標系における波動方程式の数値計算においては，波動方程式の時間微分項，空間微分項のいずれにおいても中心差分を用いて差分化している．また，解析における境界条件としては上流端境界条件として，KdV 方程式の解析解に基づいて Sech 型の波の入射境界を与え，側壁上及び下流端境界条件として波の全反射境界条件を与えた．また，底面及び側壁における摩擦損失は考慮していない．初期条件としては，一様水深を与えており，水路全域において流れはないものとして計算している．

数値実験に用いた実験水路を図-2 に示す．本解析では，水路の直線部-湾曲部-直線部が滑らかに連結している単一の湾曲部を有する水路を実験の対象としている．数値実験水路の基本設定は水路幅  $B = 3m$ ，静水深  $h = 0.3m$ ，全水路長  $35m$ ，湾曲部外周壁上の最小曲率半径  $R = 6.4m$  であり，湾曲部外壁上の最小曲率半径断面は波の入射境界から流路縦断軸方向に  $10m$  の位置に固定されている．また，入射波は振幅  $a = 0.01m$ ，入射波振幅の 1% 波高として定義した有効波長は  $\lambda_e = 5.125m$  である．以後，特に明記しない場合には上記の基本設定に従って計算したものとし，曲率半径，水位上昇比と以降に記述する場合は，いずれも水路外周壁上での最小曲率半径，最大水位上昇比を指すものとする．また水位上昇の大きさを表す無次元パラメータとして，湾曲部通過に伴う水位上昇高を入射波振幅で除した

$$\text{水位上昇比} = \frac{\eta(t, s_a, n_a) - h}{a} \quad (20)$$

を定義する．ただし， $\eta(t, s_a, n_a)$  は各地点における全水深であり，添字 *max* が併記されている場合は，水路内全地点における全時間での最大全水深を示す．

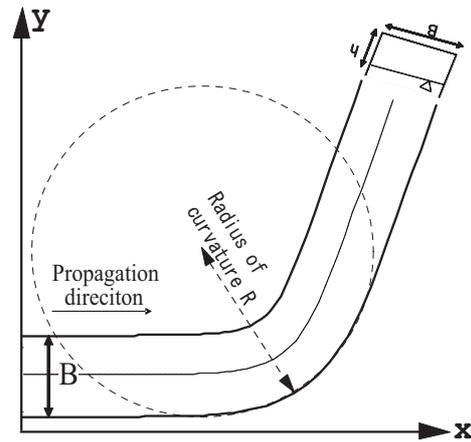


図-2 数値実験水路図

### 6. 解析結果と考察

#### (1) 入射波振幅及び水路外周壁上での最小水路曲率半径の違いに伴う最大水位上昇比の変化

入射孤立波の振幅を変えた場合の水路湾曲部外壁上における最大水位上昇比の変化を図-3 に示す．入射波振幅は無次元振幅  $a/h = 1/15, 1/30, 1/60$  と変化させた．この場合，入射波振幅の違いが最大水位上昇比に与える影響は小さく，水路曲率半径が変化しても入射波振幅の違いにより水位上昇比は変化しないことがわかる．一方，曲率半径が大きくなる，つまり水路の湾曲が緩やかになるに従い，最大水位上昇比は指数関数的に減少していることがわかる．これにより，水路湾曲部外岸における最大水位上昇比の変化は，入射波振幅に比べて，水路外周の最小曲率半径で代表される水路形状の影響をより大きく受けることと考えられる．

#### (2) 入射波の有効波長及び水路外岸壁上での最小曲率半径の違いに伴う最大水位上昇比の変化

入射孤立波の有効波長及び水路外周壁上のに伴う水位上昇比の変化を図-4 に示す．入射波の有効波長  $\lambda_e$  を  $\lambda_e = 3.375 \sim 16.2m$  の範囲で 6 ケースの計算を行ったところ，最小曲率半径  $R = 3.1m$  という急湾曲部では水位上昇比が相対的に短波長  $3.375m$  の時に最小値 1.18，長波長  $16.2m$  の場合に最大値 1.87 と，水位上昇比で最大約 0.7 の差が生じた．これは，例えば入射波振幅  $1m$  の孤立波型の津波であるとみなすと，入射波波長により最大水位上昇で  $70cm$  の差が生じることを示しており，入射波の波長が水路外周壁上における最大水位上昇比に与える影響は非常に大きいと言える．一方，同一の水路曲率半径において入射波の有効波長の違いに伴う水位上昇比を見ると，波長が長いほど最大水位上昇比は指数関数的に逓減している．以上の結果より，比較的短波長の入射波の水路湾曲部における特性を研究することは重要であると考えられる．

#### (3) 水路幅及び水路外岸壁上での最小曲率半径の違いに伴う最大水位上昇比の変化

Rostafinski<sup>2)</sup> の音波の湾曲ダクト内伝播に関する理論解析結果より，比較的幅の広いダクトにおいては波動のダ

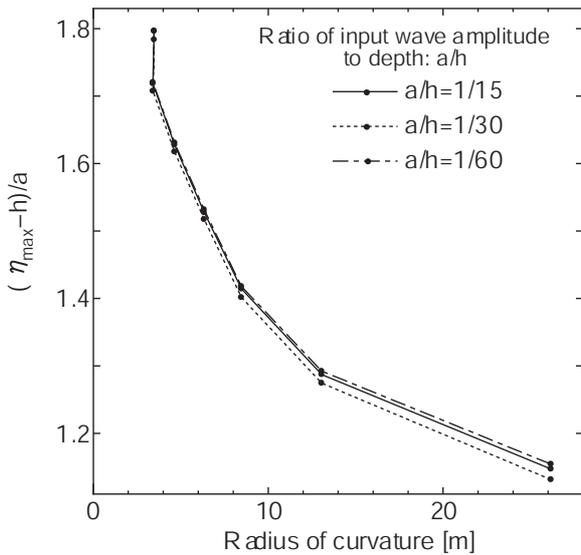


図-3 入射波振幅及び水路外岸壁上での最小曲率半径の違いに伴う水位上昇比の変化

{  $B = 3m, \lambda_e = 5.125m$ . 曲率半径が大きくなるほど、最大水位上昇率は指数関数的に逓減している．入射波振幅の違いによる水位上昇率の変化は見られない． }

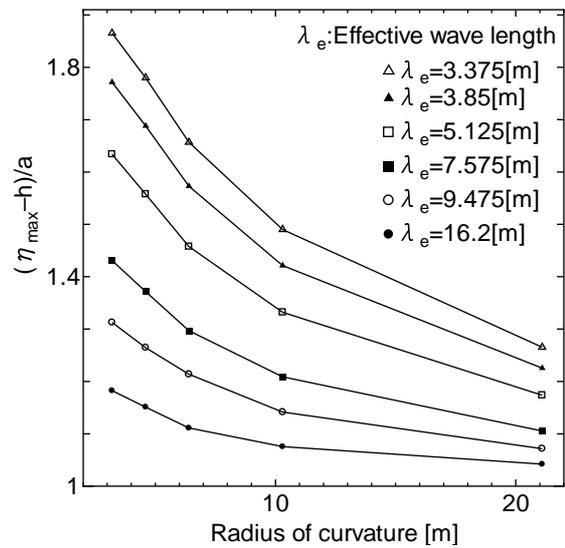


図-4 入射波の有効波長及び水路外岸壁上での最小曲率半径の違いに伴う水位上昇比の変化

{  $B = 3m, a = 0.01m$ . 入射波波長が短いほど水位上昇比は大きな値をとる．有効波長の違いによる水位上昇比の違いは急湾曲部では最大で0.7程度、水路曲率半径が小さいほど差は大きくなる． }

クト接線方向の位相速度は湾曲の鋭さ  $\theta$  に比例して増加することを解析解より得ており、水路湾曲部を伝播する水面孤立波と上記の音波の伝播の現象の相似性より、水路幅の違いに伴う水位上昇比の変化は本研究においても着目すべき点である。水路幅及び水路外周壁上の最小曲率半径に伴う水位上昇比の変化を図-5に示す。水路幅を  $B = 2, 3, 4m$  と幅広くするほどに、水位上昇比は大きな値をとることわかり、水路幅を  $B = 2, 3m$  と設定した場合の水路外周壁上の最小曲率半径が  $R = 0 \sim 10m$  の範囲に着目すると、水位上昇比の勾配が  $B = 3m$  の場合は勾配が比較的に急なのに対して、 $B = 2m$  の場合には、いずれの曲率半径においても  $B = 3m$  の場合に比べて緩やかな勾配を持つことがわかる。これは、流速及び水位上昇という点において解析対象の相違はあるが、Rostafinski の理論解析結果と一致する結果であると考えられる。

7. まとめ

本研究では湾曲水路を伝播する孤立波の、湾曲部外周壁上での最大水位上昇比に着目した解析を行った。以下に得られた知見を示す。1) 湾曲部外周壁上の最大水位上昇比は、外周壁の最小曲率半径が大きく湾曲が緩やかなほど指数関数的に逓減する。2) 入射孤立波の振幅の違いは最大水位上昇比に影響しない。3) 入射波の有効波長を変えた場合、短波長の波では長波長の波に比べ水位上昇比が大きくなる傾向を示し、湾曲が急なほど波長の違いに伴う水位上昇比の差は広がる。4) 水路幅が大きいくほど水位上昇比は大きな値をとり、また水路幅がある閾値より大きくなると急湾曲の場合、水位上昇比の変化勾配が大きくなる場合がある可能性を示した。

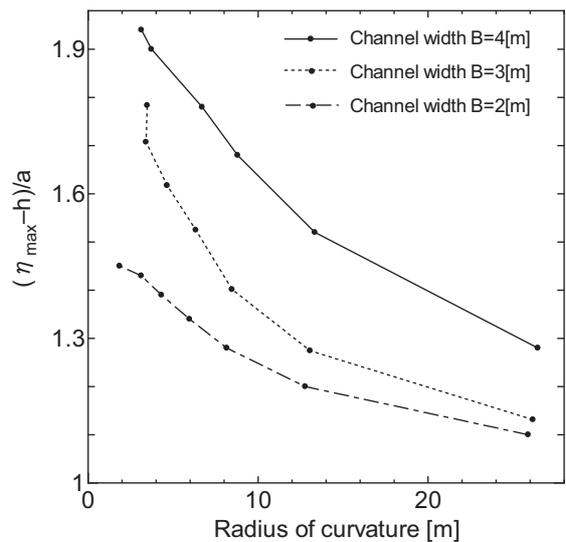


図-5 水路幅及び水路外岸壁上での最小曲率半径の違いに伴う水位上昇比の変化

{  $a = 0.01m, \lambda_e = 5.125m$ .  $B = 2, 3m$  の場合の水位上昇比に着目すると、比較的に急勾配湾曲部 ( $R < 10m$ ) において、曲率半径の違いに伴う水位上昇比の勾配が  $B = 3m$  の方が大きく、水路幅が大きな場合は水路曲率半径が水位上昇に与える影響が大きくなると考えられる． }

参考文献

- 1) 羽島徳太郎：大阪府、和歌山県沿岸における宝永・安政南海道津波の調査、地震研究所彙報、No.55,pp.505-535,1980
- 2) Rostafinski,W. : On propagation of long waves in curved ducts, J.Acoust.Soc.Am.,vol.52, pp.1411-1420, 1972.
- 3) Shi,A and Michelle,H.T. and Theodore,Y.W.:Propagation of solitary waves through significantly curved shallow water channels, J.Fluid.Mech. , vol.362,pp.157-176, 1998.
- 4) 由比 政年, 石田 啓, 間瀬 肇: 曲水路を伝播する孤立波の透過・反射特性に関する研究, 海岸工学論文集, 46 巻, 1 号, pp.31-35,1999