

安定化有限要素法による津波遡上解析

中央大学	学生員	利根川 大介
中央大学大学院	学生員	川合 伸宜
中央大学	正会員	田中 聖三
中央大学	正会員	櫻山 和男

1. はじめに

日本は、周りが海に囲まれ、4つのプレートが複雑に重なり合っており、地震による津波などの災害に見舞われることが多い国である。このような災害現象を、数値解析により、遡上域を正確に把握し、防災対策を行うことは工学上重要である。津波解析における支配方程式には、非線形長波方程式や Boussinesq 方程式などが用いられるが、波の非線形性と分散性を考慮するためには、Boussinesq 方程式を用いるのが望ましい。また、津波などの災害現象の解析において、複雑な自然地形を対象とすることが多いため、任意形状への適合性に優れた有限要素法は有効な手法であると考えられる。

そこで本論文は、支配方程式に砕波減衰モデルを導入した Boussinesq 方程式を用い、砕波、遡上現象を表現可能な数値解析手法の検討を行うものである。離散化手法に SUPG 法に基づく安定化有限要素法¹⁾を適用し、遡上域における移動境界手法として、Euler 的手法²⁾を適用する。数値解析例として Synolakis(1987)の水力実験モデル^{3),4)}を取り上げ、本手法の有効性を検討する。

2. 数値解析手法

(1) 支配方程式

支配方程式には、以下に示す非線形性と分散性を考慮した標準型 Boussinesq 方程式(分散項の修正なし)に、砕波減衰項を導入した式を以下に示す。

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A}_i \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\mathbf{N}_{ij} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_j} \right) = \mathbf{K} + \mathbf{R} - \mathbf{G}\mathbf{U} \quad (1)$$

ここで、各ベクトルとマトリックスは以下ようになる。

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} H \\ U_1 H \\ U_2 H \end{bmatrix}, \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{h^2}{3} \frac{\partial^3 U_i H}{\partial x_1 \partial x_i \partial t} \\ \frac{h^2}{3} \frac{\partial^3 U_i H}{\partial x_2 \partial x_i \partial t} \end{bmatrix}, \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 \\ -c^2 \frac{\partial z}{\partial x_1} \\ -c^2 \frac{\partial z}{\partial x_2} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ c^2 - U_1^2 & 2U_1 & 0 \\ -U_1 U_2 & U_2 & U_1 \end{bmatrix}, \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -U_1 U_2 & U_2 & U_1 \\ c^2 - U_2^2 & 0 & 2U_2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{N}_{11} = \nu_e \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2U_1 & 2 & 0 \\ -U_2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{N}_{12} = \nu_e \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -U_1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{N}_{21} = \nu_e \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -U_2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{N}_{22} = \nu_e \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -U_1 & 1 & 0 \\ -2U_2 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{U_*}{H} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{U_*}{H} \end{bmatrix}, U_* = \frac{gn^2 \sqrt{U_1^2 + U_2^2}}{H^{1/3}}$$

ここで U_i は x, y 方向の断面平均流速, $H(=h+\zeta)$ は全水深, h は静水深, ζ は水位変動量, $c(=\sqrt{gH})$ は波速, g は重力加速度, z は標高値, ν_e は渦動粘性係数, n はマンニングの粗度係数である。また, $\mathbf{U}, \mathbf{K}, \mathbf{R}, \mathbf{A}_i, \mathbf{N}_{ij}, \mathbf{G}$ はそれぞれ未知ベクトル, 分散ベクトル, 勾配ベクトル, 移流マトリックス, 砕波減衰マトリックス, 摩擦マトリックスである。なお, 支配方程式 (1) において, 分散項 \mathbf{K} を除いた非線形長波方程式には, 数値不安定性を回避するため, 衝撃捕捉項を導入している。

(2) 安定化有限要素法

支配方程式 (1) に対して, 空間方向の離散化として三角形一次要素を用い, SUPG 法に基づく安定化有限要素法を適用する。時間方向の離散化として, 2次精度を有する Crank-Nicolson 法を用いた。また, 連立一次方程式の解法には, Element-By-Element Bi-CGSTAB 法を用いた。

(3) 移動境界手法

遡上域における移動境界手法として, 固定メッシュに基づく Euler 的手法を用いる。Euler 的手法とは, あらかじめ対象領域を有限要素分割しておき, 各時間ステップにおいて, 要素が陸域の要素なら計算から除外し, 水域の要素なら計算に含めるという処理を全要素に対して行うことにより, 境界の移動を Euler 的に表現していくものである。図-1を用い, 以下にそのアルゴリズムを示す。

1) あらかじめ対象領域を有限要素分割し, 各時間ステップ n において, 各要素の3節点すべての水深 H^n を設定した微小水深 ε と比較をする。

2) 3節点すべて $H^n \leq \varepsilon$ の場合, 陸域要素と判定し, 計算領域から除外する。その際, 陸域要素の節点に $H^n = U_i^n = 0$ を与える。

3) 3節点すべて水深 $H^n > \varepsilon$ の場合, 水域要素と判定して, 計算領域に含める。

4) 3節点のうち1節点または2節点において, 水深 $H^n > \varepsilon$ の場合, 水域要素として判定して, 計算領域に含める。その際, 水際要素の水深 $H^n \leq \varepsilon$ となる節点に, $H^n = U_i^n = 0$ を与える。

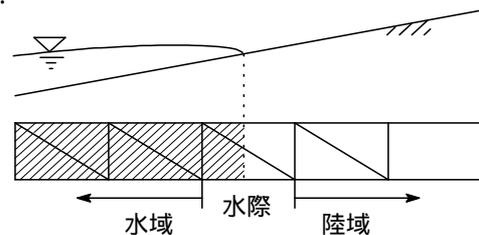


図-1 移動境界モデル

KeyWords: 安定化有限要素法, Boussinesq 方程式, 移動境界

連絡先: 〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27 E-mail:d33216@educ.kc.chuo-u.ac.jp

(4) 碎波減衰モデル

浅海域での津波の数値計算には、波の非線形性と分散性を考慮した Boussinesq 方程式を用いる必要がある。しかし Boussinesq 方程式では、碎波による運動量損失を考慮することができない。そこで本論文では、Longuet-Higgins et al.(1974) が示す碎波点における波高水深比、

$$\frac{\zeta}{h} = 0.83 \tag{2}$$

を超えたときに、岩瀬ら (2001) によって提案された碎波減衰項の渦動粘性係数⁵⁾、

$$\nu_e = \beta \sqrt{gH\zeta} \tag{3}$$

を空間分布として与え、碎波減衰を表現する。β は係数であり、岩瀬ら (2001) にならい、β=0.23 とする。

3. 数値解析例

(1) 津波遡上問題

津波の碎波、遡上問題に対して、Synolakis(1987) による水理実験結果と本手法による解析結果との比較を行い、津波の碎波、遡上の再現性について検討を行う。解析モデルを図-2 に示す。L は孤立波の半波長 (= $(\frac{4h}{3\zeta})^{\frac{1}{2}} \text{Arccosh}((\frac{1}{0.05})^{\frac{1}{2}}))$)[m] であり、初期状態は、ζ=0.3[m]、h=1.0[m] の波高水深比は 0.3 である。斜面勾配は、1:19.85 であり、水理実験を考慮し、マンシングの粗度係数は $n = 0.01[\text{s}/\text{m}^{\frac{1}{3}}]$ とした。有限要素分割は x 方向分割幅 0.1[m]、y 方向分割幅 0.1[m] を用いた。微小時間増分量 Δt=0.005[s] とし、境界条件として壁面に slip 条件を与えた。

(2) 解析結果

図-3 において、波高水深比 0.3 での無次元化した各時刻 ($t'' = t(\frac{g}{h})^{\frac{1}{2}} = 15, 20, 25, 30$) における波形の実験結果と Boussinesq 方程式、非線形長波方程式の解析結果との比較を示す。波の伝播段階 ($t'' = 15, 20$) において、Boussinesq 方程式では、分散性を考慮しているため、波の前傾化が抑えられ、波の勾配や波高が実験結果と良い一致を示していることがわかる。しかし非線形長波方程式では、非線形性のみが作用するため、波の前傾化が生じていることがわかる。碎波が生じた後の段階 ($t'' = 25, 30$) において、両方程式ともに、遡上高は実験結果に比べ、過小評価しているが、Boussinesq 方程式では、碎波減衰項の働きにより、碎波による波高減衰が表現できており、非線形長波方程式に比べ、実験結果と定性的に良い一致を示していることがわかる。

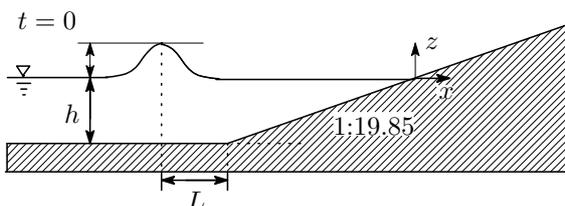


図-2 Synolakis による水理実験モデル

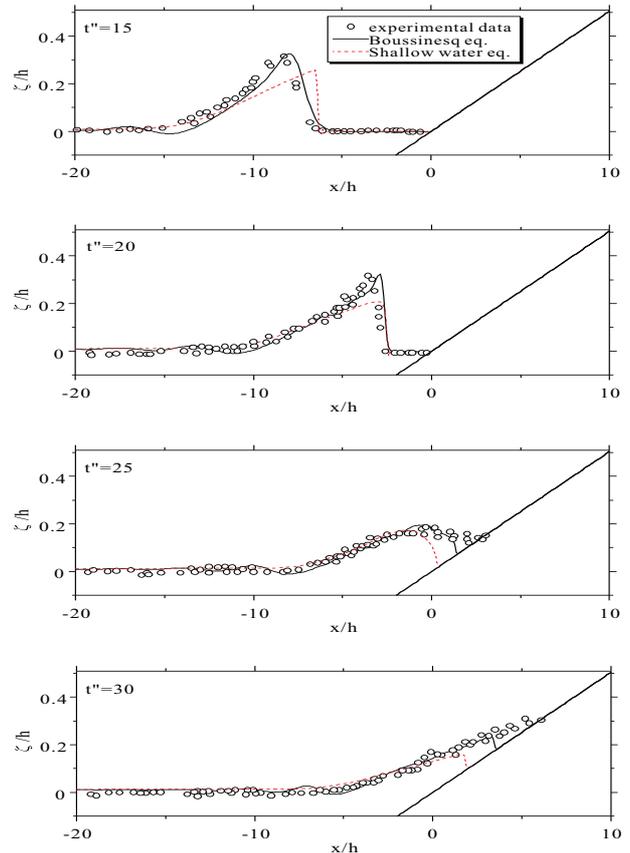


図-3 各時刻における波形の実験結果と解析結果との比較

4. おわりに

本論文では、支配方程式に碎波減衰モデルを導入した Boussinesq 方程式を用い、碎波、遡上現象を表現可能な数値解析手法の検討を行った。数値解析例として、Synolakis による水理実験モデルを取り上げ、実験結果と解析結果とを比較することにより、以下の結論を得た。

- 本手法は移動境界手法、碎波減衰モデルを導入することにより、碎波、遡上現象を表現可能であることが確認された。
- 津波遡上問題において、Boussinesq 方程式は非線形長波方程式に比べ、実験結果と定性的に良い一致を示していることが確認された。

今後の課題として、遡上域に関する移動境界手法の検討などがあげられる。

参考文献

- 1) T.E.Tezduyar : Stabilized finite element formulations for incompressible flow computations, *Advance in applied Mech.*, 28,pp1-44, 1991
- 2) Mutsuto Kawahara, Tsuyoshi Umetsu : Finite element method for moving boundary problems in river flow, *Int. J. Numer. Methods in Fluids*, 6, pp.365-386, 1986
- 3) Synolakis, C. E : The runup of solitary wave, *J. Fluid Mech.*, 185, pp.523-545, 1987
- 4) Titov, V. V., and Synolakis, C. E : Modeling of breaking and nonbreaking long-wave evolution and runup using VTCS-2, *J. Wtrwy. Port, Coast. , and . Oc. Engrg.*, ASCE, 121(6), 308-316, 1995
- 5) 岩瀬浩之, 深澤雅人, 後藤智明 : ソリトン分裂の碎波変形に関する水理実験と数値計算, 海岸工学論文集, 第 48 巻, pp. 306-310, 2001