音の伝播に関する三次元有限要素解析法

日本大学理工学部土木工学科　学生会員　○佐藤　真太朗
日本大学理工学部　正会員　野村　卓史

１．はじめに

近年，風車による風切り音や，橋梁が振動することによって発生する低周波音，交通機関の発達による騒音など様々な騒音問題が都心部や住宅街周辺で発生している．また音は気象要因の影響によっては思いもよらない広範囲まで伝播することも知られている．本研究では音の伝播に気象要因が影響する基礎方程式 [1]に有限要素法を適用し，六面体要素により 3 次元数値解析を行うことを目的とする．

２．解析手法

本解析で用いる音圧 p' と流速ベクトル $\mathbf{v}'$ に関する支配方程式は式(1) (2)で表される．

$$\frac{\partial p'}{\partial t}+\mathbf{v}_0\cdot\nabla p'+\mathbf{v}'\cdot\nabla p_0+\rho_0 c^2\nabla\cdot\mathbf{v}'+c^2 p'\nabla\cdot\frac{\mathbf{v}_0}{c^2}=0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t}+\mathbf{v}_0\cdot\nabla\mathbf{v}'+\left(\mathbf{v}'\cdot\nabla\right)\mathbf{v}_0+\frac{1}{\rho_0}\nabla p'-\frac{p'}{\left(\rho_0 c\right)^2}\nabla p_0=0 \quad (2)$$

ここで $p_0,\mathbf{v_0},\rho_0$ はそれぞれ音が伝わる媒質である空気の圧力，流速ベクトル，密度である．すなわち，$\mathbf{v_0}$ は風速を表している．

式(1) (2)の方程式に重み付き残差法を適用し得られる重み付き残差方程式は次式(3)，(4)で表わされる．

$$\iiint_\Omega w_p\left[\frac{\partial p'}{\partial t}+\mathbf{v}_0\cdot\nabla p'+\mathbf{v}'\cdot\nabla p_0+c^2 p'\nabla\cdot\frac{\mathbf{v}_0}{c^2}+\rho_0 c^2\nabla\cdot\mathbf{v}'\right]d\Omega=0 \quad (3)$$

$$\iiint_\Omega \mathbf{w}_v^{\mathrm{T}}\left[\frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t}+\mathbf{v}_0\cdot\nabla\mathbf{v}'+\left(\mathbf{v}'\cdot\nabla\right)\mathbf{v}_0+\frac{1}{\rho_0}\nabla p'-\frac{p'}{\left(\rho_0 c\right)^2}\nabla p_0\right]d\Omega=0 \quad (4)$$

この重み付き残差方程式(3) (4)をガラーキン有限要素法により離散化して得られる有限要素方程式は次式(5)で表される．

$$\begin{bmatrix}\mathbf{M} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \overline{\mathbf{M}}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\dot{\mathbf{p}}'\\ \dot{\mathbf{v}}'\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}\mathbf{A}_{[1]}+\mathbf{A}_{[4]} & \mathbf{A}_{[2]}+\mathbf{A}_{[3]}\\ \mathbf{A}_{[7]}-\mathbf{A}_{[8]} & \mathbf{A}_{[5]}+\mathbf{A}_{[5]}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\mathbf{p}'\\ \mathbf{v}'\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\mathbf{0}\\ \mathbf{0}\end{Bmatrix} \quad (5)$$

このとき $\mathbf{M},\overline{\mathbf{M}},\mathbf{A}_{[1]}\sim\mathbf{A}_{[8]}$ は係数マトリックスである．

有限要素方程式(5)の表記を簡潔に表すと式(6)のように表せる．本研究では，有限要素方程式(7)の時間積分法として後退差分法を用いている．その結果連立 1 次方程式(7)を，各ステップごとに解いていくことになる．

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{x}}+\mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{0} \quad (6) \qquad \left(\frac{1}{\Delta t}\mathbf{M}+\mathbf{A}\right)\mathbf{x}^{\mathbf{n+1}}=\frac{1}{\Delta t}\mathbf{M}\mathbf{x}^{\mathbf{n}} \quad (7)$$

上式(8)は非対称係数行列のため，その解法には Bi-CG 法を用いた．

3. Bi-CG 法

上記の式(7)の連立 1 次方程式を解くために，本研究では Bi-CG 法 [2]を用いた．
連立 1 次方程式(8)として適当な初期値 $\mathbf{x_0}$ を与え，初期残差式(9)として適当な任意ベクトル $\mathbf{r}_\mathbf{0}^*(=\mathbf{r_0})$ を用意する．

キーワード　音，有限要素解析，六面体要素

連絡先　〒101-8308　東京都千代田区神田駿河台 1-8-14　日本大学理工学部　TEL03-3259-0411

$$\mathbf{Ax}=\mathbf{b} \quad (8) \qquad \mathbf{r}_0=\mathbf{b}-\mathbf{Ax}_0 \quad (9)$$

パラメータ $\beta_{-1}=0$ とし，0,1,2,3・・・として下記の式(10)から式(16)まで，各ステップごとのループを開始する．

$$\mathbf{p}_n=\mathbf{r}_n+\beta_{n-1}\mathbf{p}_{n-1} \qquad (10)$$

$$\mathbf{p}^*_n=\mathbf{r}^*_n+\overline{\beta}_{n-1}\mathbf{p}^*_{n-1} \qquad (11)$$

$$\alpha_n=\frac{(\mathbf{r}^*_n,\mathbf{r}_n)}{(\mathbf{p}^*_n,\mathbf{Ap}_n)} \qquad (12)$$

$$\mathbf{x}_{n+1}=\mathbf{x}_n+\alpha_n\mathbf{p}_n \qquad (13)$$

$$\mathbf{r}_{n+1}=\mathbf{r}_n-\alpha_n\mathbf{Ap}_n \qquad (14)$$

$$\mathbf{r}^*_{n+1}=\mathbf{r}^*_n-\overline{\alpha}_n\mathbf{A}^T\mathbf{p}_n \qquad (15)$$

$$\beta_n=\frac{(\mathbf{r}^*_{n+1},\mathbf{r}_{n+1})}{(\mathbf{r}^*_n,\mathbf{r}_n)} \qquad (16)$$

この時 $\overline{\alpha}_n,\overline{\beta}_{n-1}$ は α_n,β_{n-1} の共役複素数なので実数方程式の問題では $\overline{\alpha}_n=\alpha_n,\overline{\beta}_{n-1}=\beta_{n-1}$ となり $\mathbf{A}^T$ は $\mathbf{A}$ の転置行列となる．

上記のループ計算において $\|\mathbf{r}_n\|\le\varepsilon\|\mathbf{b}\|$ を満たす $\mathbf{r}_n$ が得られた時点でループを終了させ，この時 $\mathbf{x}_n$ をこの連立１次方程式の解とする．

$\|\mathbf{b}\|$ はベクトル $\mathbf{b}$ のノルムで，ε は収束判定基準を表している．

今回の解析では $\varepsilon=1.0\mathrm{E}-05$ とした．

4. 六面体要素

本研究では領域のメッシュ分割に図１の六面体要素を使用した．また，要素に関する積分には Gauss の数値積分法［式(17)］を用い，積分点は要素の中心を０として ξ,η,ζ 方向にそれぞれ２点ずつ，一要素あたり計８点をとった．

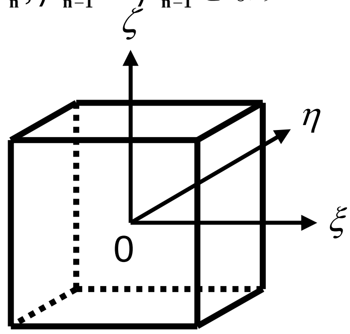

図１　六面体要素

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}G(\xi,\eta,\zeta)d\xi d\eta d\zeta=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}G(\xi,\eta,\zeta)W_iW_jW_k \quad (17)$$

5. 解析領域

解析に使用する解析モデルは図２に示すような立方体の六面体要素を x 方向に４要素，y 方向に４要素，z 方向に４要素並べた立方体領域を解析対象とした．

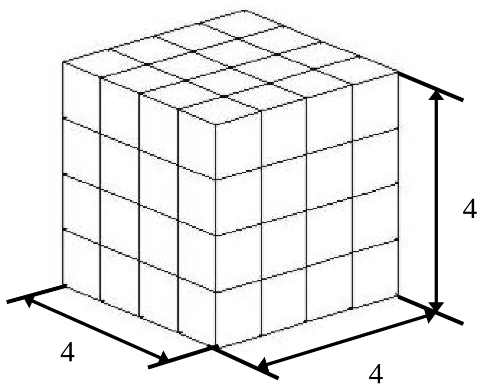

図２　解析モデル

初期条件としては領域の中央に初期音圧 1.0，中央に隣接する６節点に音圧 0.5 を与えて解析を行った．この時，音速 c =1.0，密度 ρ_0 =1.0，圧力 p_0 =0.0，風速 $\mathbf{v}_0$ ＝0.0 とした．解析開始から１ステップ目の $x-y$ 平面での解析結果を図３に示す．

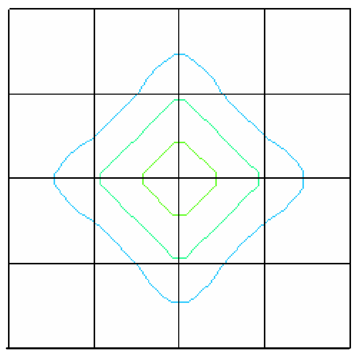

図３　音圧コンター図

6. まとめ

現時点ではプログラム上に問題があって解析を継続できなかった．プログラム上の問題を解決し，その上で放射境界条件の検討，気象要因を考慮した解析，領域内に遮音壁を含む解析等を行う予定である．

参考文献

1）　野村卓史，高木耕平：気象要因の影響を考慮した音の伝播に関する有限要素解析法，応用力学論文集 Vol.9，pp221-230

2）　藤野清次，張紹良：反復法の数理，朝倉書店，1996