k-ω モデルを用いた有限要素法による乱流解析

日本大学理工学部　学生会員　○宮田　秀太
日本大学理工学部　正会員　長谷部　寛
日本大学理工学部　正会員　野村　卓史

１．はじめに

レイノルズ平均型モデルを用いた構造物周りの流れの解析において，航空宇宙の分野でよく用いられている k-ω モデル[1)]を使用した解析例は k-ε モデルほど多くない．そこで本研究では k-ω モデルを構造物周りの流れの解析へ適用することを目的とした．そこで，k-ω モデルを用いた有限要素解析法を構築し，解析対象としてチャネル乱流の解析を行ったので，その結果を報告する．

２．解析手法

平均流に関する運動方程式［式(1)］および連続条件式［式(2)］を以下に示す．

$$\frac{\partial \overline{U_i}}{\partial t}+\overline{U_j}\frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_j}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial \overline{P}}{\partial x_i}+\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\nu\left(\frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_j}+\frac{\partial \overline{U_j}}{\partial x_i}\right)-\overline{u_i u_j}\right] \quad (1)$$

$$\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_i}=0 \quad (2) \qquad \overline{u_i u_j}=-\nu_t\left(\frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_j}+\frac{\partial \overline{U_j}}{\partial x_i}\right)+\frac{2}{3}k\delta_{ij} \quad (3)$$

ここで，$\overline{U}_i$ は平均流速，$\overline{P}$ は平均圧力，ρ は空気密度，ν は分子動粘性係数，$\overline{u_i u_j}$ は乱れの影響を表すレイノルズ応力であり，線形渦粘性モデルでは［式(3)］のようにモデル化される．ν_t は渦動粘性係数である．渦動粘性係数 ν_t を k-ε モデルでは乱流エネルギー k，エネルギー散逸率 ε を用いて表す［式(4)］．k-ω モデルではエネルギー散逸率 ε の代わりに比散逸率 ω を使って表す［式(5)］．

$$\nu_t=c_\mu\frac{k^2}{\varepsilon}\cdots(4),\quad \nu_t=\frac{k}{\omega}\cdots(5),\quad \omega=\frac{\varepsilon}{\beta^* k}\cdots(6)$$

$$C_\mu=\beta^*=0.09$$

本研究では Wilcox による k-ω モデルを用いた．以下に k 方程式，ω 方程式を示す．

〔k 方程式〕

$$\frac{Dk}{Dt}=\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\nu+\sigma^*\nu_t\right)\frac{\partial k}{\partial x_j}\right]+\nu_t\left(\frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_j}+\frac{\partial \overline{U_j}}{\partial x_i}\right)\frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_j}-\beta^*\omega k \quad (7)$$

〔ω 方程式〕

$$\frac{D\omega}{Dt}=\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\nu+\sigma\nu_t\right)\frac{\partial \omega}{\partial x_j}\right]+\gamma\left(\frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_j}+\frac{\partial \overline{U_j}}{\partial x_i}\right)\frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_j}-\beta\omega^2 \quad (8)$$

$$\left(\sigma^*=0.5, \sigma=0.5, \beta^*=0.09, \beta=0.075, \gamma=5/9\right)$$

本研究では物理的に正の値である乱流モデルの変数が数値計算上負の値になることを防ぐため，logarithmic form[2)]を適用した．logarithmic form では，乱流モデルの変数の対数をとり，新たな変数の方程式を解くが，k-ω モデルでは k 方程式に壁面境界条件 $k=0$ を与えるため対数をとることができない．よって ω 方程式にのみ logarithmic form を適用している．ω と Ω の関係式および Ω 方程式を以下に示す．

〔ω と Ω の方程式〕

$$\Omega=\ln\omega \quad (9)$$

〔Ω 方程式〕

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t}+\overline{U_j}\frac{\partial \Omega}{\partial x_j}=\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\nu+\sigma\nu_t\right)\frac{\partial \Omega}{\partial x_j}\right]+\left(\nu+\sigma\nu_t\right)\left(\frac{\partial \Omega}{\partial x_j}\right)^2+\gamma e^{-\Omega}\left(\frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_j}+\frac{\partial \overline{U_j}}{\partial x_i}\right)\frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_j}-\beta e^{\Omega} \quad (10)$$

ここで，右辺第 3 項の生産項に対しては［式(5)］の関係を用いて整理している．

これらの方程式を離散化する手法として有限要素法を用いた．空間は双線形四角形要素を用いて分割した．$\overline{U}$，k，Ω は要素内双線形分布，$\overline{P}$，ν_t は要素内一定分布とし，時間積分法として Predictor-Corrector 法[3)]，安定化手法として SUPG 法[3)]を用いた．

３．チャネル乱流の解析

Iwamoto らのチャネル乱流の DNS データ[4)]を比較対象として解析を行った．また修正 k-ε モデル[5)]でも解析を行った．図 1 に解析条件を示す．解析領域の高さはチャネル半幅 δ=2.5 cm として，幅は L=120δ

キーワード　有限要素法，乱流モデル，k-ω モデル，チャネル乱流
連絡先　〒101-8308　東京都千代田区神田駿河台 1-8-14　日本大学理工学部　ＴＥＬ03-3259-0411

とした．境界条件として，流入境界Γ_1ではDNSデータに従う分布を，U, k, ε, ω に与える．下部境界Γ_4には，k-ω モデルではnon-slip条件を与えている．修正k-ε モデルでは壁関数を用いた．壁面近傍のメッシュを図2に示す. k-ω モデルでは壁面から直接メッシュ分割しているのに対して, 修正 k-ε モデルでは壁関数を用いていることから，底面からδ_w 離れた位置を計算境界としている．表1に k-ω モデル，修正 k-ε モデルの解析メッシュの諸元を示す.

４． 解析結果とDNSとの比較

図3に流速分布を示す．k-ω モデル，修正 k-ε モデル共にDNSデータに近い分布を得ることができたが, 壁面まで直接計算を行った k-ω モデルでは, y/δ =0.2以下の領域で若干差が生じた.

図4には乱流エネルギーの分布を示す. k-ω モデルではDNSデータと比較すると，粘性底層では正確に分布をとらえている．しかし，y/δ =0.1 付近のピーク値を過小評価し，y/δ =0.2 より大きい領域で過大評価してしまった．k-ω モデルと修正 k-ε モデルの結果はほぼ近い値となった.

５． 結論

物体境界まで直接計算を行う上で，k-ε モデルでは低Re数型 k-ε モデルのように減衰関数を用いることが必要とされるが, k-ω モデルでは減衰関数なしで物体境界まで計算でき，結果に関しても流速分布をある程度DNSデータに近い分布でとらえることが確認できた．しかし，乱流エネルギーの分布に関してはピークを過小評価し，対数領域では過大評価した．ただ，定量的には差があるものの定性的には一致している．また，修正 k-ε モデルの計算領域での比較では流速分布，乱流エネルギー分布共にあまり差はなかった．今後は他の k-ω モデルによる解析を行い，モデル精度の検証を行う予定である.

参考文献

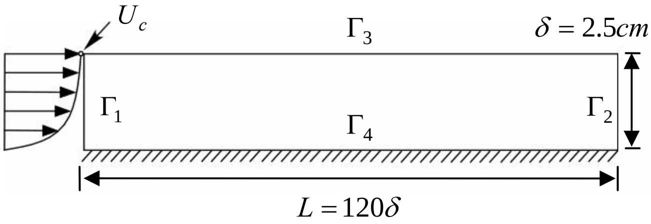
1)D.C.Wilcox:AIAA J.,26(11),pp.1299-1310,1988

2)Ilinca,F.et.al:AIAA J.,36(1),pp.44-50,1998

3)Brooks,A.N.et.al:Comput.Methods Appl.Mesh.Engrg.,32,pp.199-259,1982

4)東京大学　熱流体工学研究室ホームページ：http://www.thtlab.t.u-tokyo.ac.jp/index-j.html

5)長谷部寛, 他：応用力学論文集，9,pp.811-820，2006



$\Gamma_1 : U_c = 157.27\,cm/s,\ k_c = 54.5\,cm^2/s^2,$

$\omega_c = 53.0\,s^{-1},\ \varepsilon_c = 259.8\,cm^2/s^3$

Γ_2 :自由流出

$\Gamma_3 : \overline{U} = free,\ \overline{V} = 0$

$\Gamma_4 : \overline{U} = 0, \overline{V} = 0, k = 0, \omega = \dfrac{6\nu}{\beta^*(\Delta y)^2}$ 〔k-ω モデル〕

Γ_4 : 壁関数 , $\delta_w = 1/5\delta$ 〔修正 k-ε モデル〕

図1 解析条件

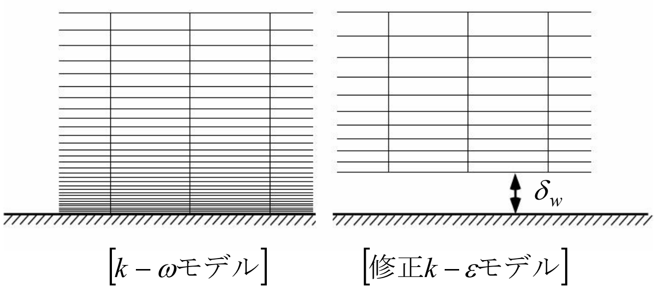


図2 壁面付近の解析メッシュ図

表1　解析メッシュ諸元

モデル	メッシュ分割数		最小メッシュ幅		y^+
	x 方向	y 方向	$\Delta x/L$	$\Delta y/\delta$	
k-ω	300	31	1/300	0.008	1.4
修正 k-ε	300	11	1/300	0.2	30

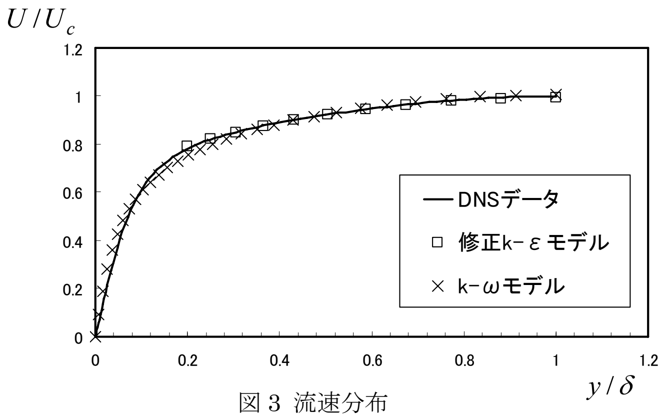


図3 流速分布

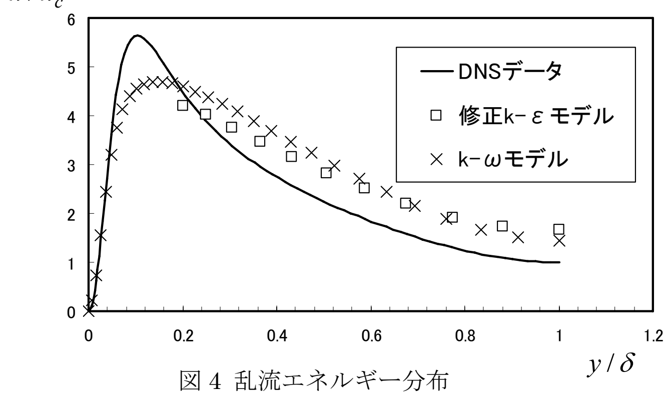


図4 乱流エネルギー分布