

非圧縮性粘性流体に対する格子ボルツマン法の精度検証

中央大学 学生員 楠 和也
 中央大学 学生員 石川 裕士
 中央大学 正会員 田中 聖三
 中央大学 正会員 櫻山 和男

1. はじめに

近年、数値流体力学の新しい手法として、格子ボルツマン法¹⁾⁻²⁾ (LBM: Lattice Boltzmann Method) が注目を集めている。この手法は、アルゴリズムが簡便なため計算が高速に処理可能であり、粒子の計算を局所的に行う陽的な解法で大規模計算に適している等の利点を有しているため、LBMは有効な解析手法になり得ると考えられる。著者らは、これまでLBMに着目し、非圧縮性粘性流体解析への適用を行ってきた³⁾。しかし、その精度についての検討は十分になされていなかった。

そこで本論文では、非圧縮性粘性流体解析に対するLBMの精度検証を目的とするものである。数値解析例としてCavity内対流問題、Poiseuille流れ問題を取り上げ、領域型解法として一般的な有限要素法(FEM)と比較することにより、本手法の解析精度及び、計算時間の観点から比較検討を行う。

2. 格子ボルツマン法

LBMは、流体を有限個の速度を持つ仮想的な粒子の集合体としてとらえ、各粒子の衝突と並進を微視的な流体粒子の分布関数を変数として用いて逐次計算し、その求められた粒子分布関数から速度や圧力の巨視的変数を求める計算手法である。

(1) 格子ボルツマン方程式

格子点上の粒子の運動は、以下の格子ボルツマン方程式によって表される。なお、衝突項には格子BGKモデルを用いた。

$$f_i(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i \Delta t, t + \Delta t) = f_i(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{\tau} [f_i^{eq}(\mathbf{x}, t) - f_i(\mathbf{x}, t)] \quad (1)$$

この式により粒子の計算を局所的に行い、陽的に未知量である粒子分布関数を求める。左辺は粒子の並進過程を、右辺は衝突過程を示している。上式において f_i は i 方向の粒子がどれくらい存在するかをいうことを表す粒子分布関数、 Δt は微小時間増分量を表す。また、 \mathbf{c}_i は粒子の並進ベクトルを表している。なお、等温場の格子気体モデルとしてはいくつか提案されているが、本論文では2次元9速度モデルを用いる。

$f_i^{eq}(\mathbf{x}, t)$ は、局所平衡分布関数であり、 τ は単一時間緩和係数である。この衝突演算子 τ は、一回の衝突において全格子点の粒子分布が、常に同じように $\frac{1}{\tau}$ の割合で非平衡量が減少して、局所的な平衡状態に向かって緩和するという

ことを表し、動粘性係数 ν を用いて以下のように表される。

$$\tau = 3\nu + \frac{1}{2} \quad (2)$$

τ は $\frac{1}{2}$ から無限大までの値をとる。 τ が $\frac{1}{2}$ に近づくということは、粘性が小さくなることを意味し、 $\frac{1}{2}$ になると非粘性の流体となりLBMでは解析を行うことができない。

(2) 局所平衡分布関数

局所平衡分布関数は、ある空間内において平衡状態になった場合の粒子の分布を表す関数であり、流体の密度と流速によって決定され、以下の式で表される。

$$f_i^{eq} = E_i \rho \left[1 + 3(\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{u}) + \frac{9}{2}(\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{u})^2 - \frac{3}{2} \mathbf{u}^2 \right] \quad (3)$$

上式において、 ρ は流体の密度、 \mathbf{u} は流体の巨視的速度を表している。また、本論文で用いている2次元9速度モデルでは E_i の値を、次のような値とする必要がある。

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{4}{9} \\ E_2 &= E_3 = E_4 = E_5 = \frac{1}{9} \\ E_6 &= E_7 = E_8 = E_9 = \frac{1}{36} \end{aligned} \quad (4)$$

(3) 流れの巨視的変数

流体の巨視的密度、速度は、格子ボルツマン方程式においての未知量である粒子分布関数を用い、以下の式より算出される。

$$\begin{aligned} \text{密度;} \quad \rho &= \sum_i^9 f_i \\ \text{速度;} \quad \mathbf{u} &= \frac{1}{\rho} \sum_i^9 \mathbf{c}_i f_i \\ \text{圧力;} \quad P &= \frac{2}{D} \rho e \end{aligned} \quad (5)$$

ここで、 D は空間次元、 e は内部エネルギーを表す。なお、本報告では等温モデルを扱っているので $e = \frac{D}{6}$ となり、圧力 P は、次式によって算出される。

$$\text{圧力;} \quad P = \frac{\rho}{3} \quad (6)$$

3. 数値解析例

LBMの有効性を検証するため、数値解析例としてCavity内対流問題と、Poiseuille流れ問題を取り上げた。

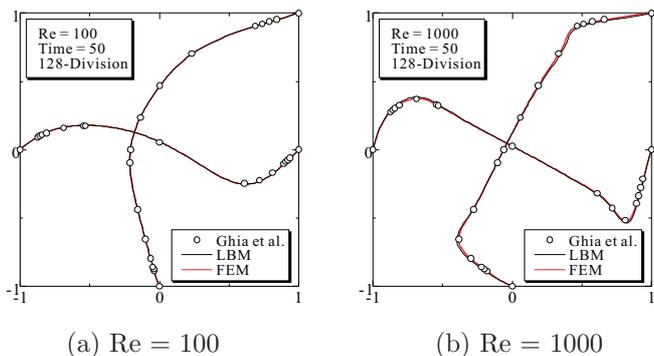


図-1 中心軸における流速図

表-1 計算時間と記憶容量の比較

	Re=100	Re=1000	記憶容量
LBM	11m34s	11m46s	3.5M byte
FEM	19m11s	46m31s	50M byte

(1) Cavity 内対流問題⁵⁾

解析条件としては、上面では x 方向の流速 ($u = 1.0$) を与え、境界条件として固定壁面については non-slip 条件を与えている。また、無次元時間として 50 まで計算を行った。LBM の有効性の検討を、解析精度、計算時間及び記憶容量の観点から FEM との比較のもとに行った。なお、格子点数は FEM と同じとした。また、FEM には 2 次元の Navier-Stokes 方程式と連続式に対して SUPG/PSPG 法に基づく安定化有限要素法⁴⁾ を適用した直接解法を用いた。

解析結果として 図-1 に 1 辺の分割数が 128 分割の場合における、Reynolds 数が (a) 100 , (b) 1000 の中心軸における流速図をそれぞれ示す。これより、LBM, FEM どちらの手法を用いた場合も Ghia らの参照解⁵⁾ と定量的な一致を示していることが確認できる。ただし、LBM は Reynolds 数が高くなることによって若干精度が落ちる傾向にあることがわかる。

また、LBM と FEM の計算時間及び記憶容量の比較を表-1 に示す。この結果から、LBM の計算時間は FEM に比べ、Reynolds 数が 100 の時は約 50 % , Reynolds 数が 1000 の時は約 20 % , LBM の記憶容量については FEM に比べ約 7 % となっていることから、LBM は計算時間及び、記憶容量について優れた手法であり、大規模計算に有効な手法であるといえる。

(2) Poiseuille 流れ問題

分割数が解析精度に与える影響について検討するため数値解析例として Poiseuille 流れ問題を取り上げた。図-2 に解析モデルを示す。図-2 のように流入部では x 方向

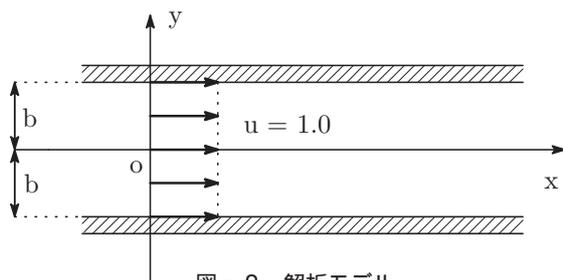


図-2 解析モデル

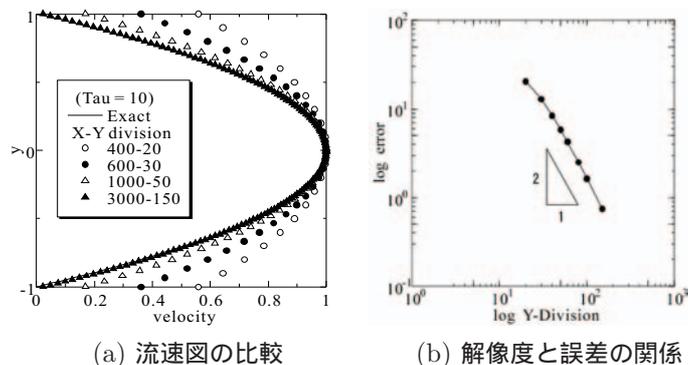


図-3 分割数による流速分布の比較

の流速 ($u = 1.0$) を与え、上下面の境界条件については non-slip 条件を与える。また、境界条件を Bounce-back 条件、単一時間緩和係数 τ を 10.0 として、分割数を変えることによって、解像度による誤差の収束性について検討した。解析結果として 図-3 に、(a) y 軸上の x 方向の流速を解像度の違いによって比較したものと、(b) 解像度と誤差の関係を示す。(a) より、境界条件の処理として Bounce-back 条件を適用したときに生じるすべり速度が、解像度を上げることによって減少していくことがわかる。さらに (b) 解像度と誤差の関係より、解像度と誤差は、解像度をあげることにより、ほぼ 2 次精度で誤差が収束していく様子が確認できる。

4. 終わりに

本論文では、非圧縮性粘性流体解析に対する LBM の精度検証を目的とし、その有効性及び妥当性について検討を行った。数値解析例として Cavity 内対流問題、Poiseuille 流れ問題を取り上げ、その結果以下の結論を得た。

- LBM による解析精度は、FEM による解析精度に比べ若干劣るものの、理論解と良い一致を示し、解析精度の観点から本手法の有効性が確認できた。
- 解像度と誤差の関係については、解像度をあげることにより、ほぼ 2 次精度で誤差が収束していくことが確認できた。
- LBM による計算時間と記憶容量は、FEM に比べ有利であることが確認できた。

今後の課題としては、LBM の非構造格子への拡張などが挙げられる。

参考文献

- 1) S.Chen, and Doolen,G.D.: Lattice Boltzmann Method for Fluid Flow, *Annu. Rev. Fluid Mech.*, **30**, pp.329-364, 1998.
- 2) 稲室隆二: 格子ボルツマン法, 物性研究, pp.197-232, 2001.
- 3) 立石 純也, 榎山和男: CIV4-格子ボルツマン法による非構造格子を用いた非圧縮性粘性流体の解析, 土木学会応用力学論文集, 土木学会, **7**, pp.323-329, 2004.
- 4) T.E.Tezduyar: Stabilized finite element formulations for incompressible flow computations, *Advance in applied Mech*, **28**, pp.1-44, 1991.
- 5) Ghia, U., Ghia,K.N., and Shin,C.T.: High-Re solutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a Multigrid Method, *J. Comput. Phys.*, **48**, pp.387-411, 1982.