

# 有限要素法に基づく非圧縮性粘性流れ解析における直接法と分離型解法の比較

中央大学 学生員 仲村 淳  
 中央大学 学生員 八田 政知  
 中央大学 正会員 田中 聖三  
 中央大学 正会員 檜山 和男

## 1. はじめに

大気等の流体挙動を把握することは、その影響を受ける長大橋等の土木構造物の設計や、高層ビル建設に伴うビル風等の環境評価を行う際には、重要な検討項目となる。これらの流体挙動を数値解析により求めることは、近年の計算機性能の向上や、数値解析手法の発展に伴い、多くの分野で用いられている。数値解析を行う際に、これまでに数多く提案された手法の中から、現象に対して適切な解析手法を選択することは重要であり、それぞれの数値解析手法の特徴を理解する必要がある。

そこで本論文は、非圧縮性粘性流体の有限要素解析において、解析手法が解に及ぼす影響について比較を行った。比較する手法として、流速と圧力を連立して求める直接法と、流速と圧力を分離し、個々に求める分離型解法の2手法を取り上げ、計算時間、解析精度、記憶容量の観点から比較検討を行った。数値解析例として、Cavity 内対流問題と円柱周り流れ解析を行った。

## 2. 数値解析手法

### (1) 基礎方程式

非圧縮性粘性流体の運動方程式、及び、連続式は、式(1)、(2)で表される。  
 運動方程式；

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = 0 \quad (in \ \Omega) \quad (1)$$

連続式；

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (in \ \Omega) \quad (2)$$

上式において、 $u_i$  は流速、 $p$  は圧力、 $Re$  は Reynolds 数を表し、 $Re = \frac{UL}{\nu}$  で定義される。 $U$ 、 $L$  はそれぞれ代表流速、代表長さであり、 $\nu$  は動粘性係数である。

### (2) 直接法

直接法は、運動方程式と連続式を直接離散化し、圧力場と流速場を同時に解く手法である。本論文では式(1)、(2)に対して、SUPG/PSPG法に基づく安定化有限要素法<sup>1)</sup>を適用し、空間方向の離散化には P1/P1 (流速・圧力一次補間) 要素を用いて補間を行い、時間方向の離散化には、2次精度を有する Cranck-Nicolson 法を用いた。移流速度は2次精度 Adams-Bashforth 法により近似した。連立一次方程式の解法には、Element-by-Element Bi-CGSTAB 法を用いた。

### (3) 分離型解法

分離型解法は、圧力場と流速場を分離して解く方法である。運動方程式に対して準陽的解法を適用し、時間方向に離散化した運動方程式の発散を取り、連続式を代入することにより圧力に関する Poisson 方程式(3)が導かれる。

Poisson 方程式；

$$\frac{\partial^2 p^{n+1}}{\partial x_i^2} = \frac{1}{\Delta t} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_i} \quad (3)$$

なお、Poisson 方程式の右辺の  $\tilde{u}_i$  は中間流速であり、式(4)で定義される。

中間流速；

$$\tilde{u}_i = u_i^n - \Delta t \left\{ u_j^n \frac{\partial u_i^n}{\partial x_j} - \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u_j^n}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^n}{\partial x_i} \right) \right\} \quad (4)$$

SUPG 法に基づく安定化有限要素法を式(1)、(4)に適用し、空間方向の離散化には P1/P1 要素による補間を行う。式(4)により  $\tilde{u}_i$  を求め、式(3)に代入することにより  $p^{n+1}$  を求める。求めた  $p^{n+1}$  を式(1)に代入することにより流速  $u_i^{n+1}$  を求め、時間進行を行なう。連立一次方程式の解法には Element-by-Element CG 法を用いた。

## 3. 数値解析例

### (1) 2次元 Cavity 内対流問題

要素分割数による解析結果の精度の検証、及び、計算時間の比較の検討を行なうため、2次元 Cavity 内対流問題を取り上げた。

#### a) 解析条件

解析領域、境界条件を図-1に示す。尚、分離型解法では底面中心の1点において、 $p=0.0$ を与えた。有限要素分割には  $16 \times 16(x \times y)$  分割、 $32 \times 32(x \times y)$  分割の2ケースを用い、図-2に、 $16 \times 16$  分割の有限要素分割図を示す。Reynolds 数は、 $Re=1000, 10000$  の2ケース、微小時間増分量を  $\Delta t = 10^{-3}, 10^{-2}, 10^{-1}$  の3ケースで、無次元時間 200 まで計算を行った。計算機は IBM pSeries 595、CPU は POWER5 1.9GHz を使用した。

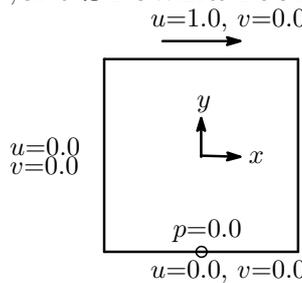


図-1 解析領域・境界条件

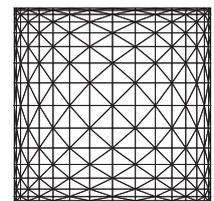


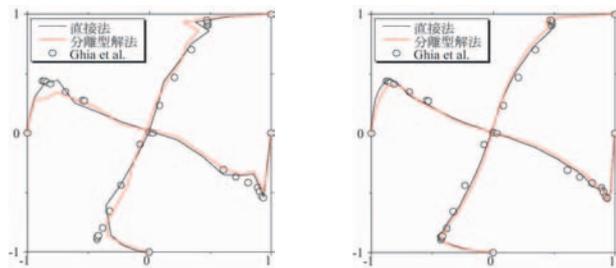
図-2 有限要素分割図

KeyWords： 安定化有限要素法，直接法，分離型解法

連絡先： 〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27 TEL 03-3817-1815 FAX 03-3817-1803

表-1 計算時間

I-021		Re= 1000		Re= 10000	
		直接法	分離型	直接法	分離型
分割数	$\Delta t$	計算時間			
16	$10^{-3}$	2m 7s	36s	4m36s	1m19s
	$10^{-2}$	16s	-	49s	-
32	$10^{-3}$	8m46s	2m14s	17m43s	8m56s
	$10^{-2}$	1m18s	-	4m50s	-
	$10^{-1}$	59s	-	2m16s	-



(a) 16 × 16 分割 (b) 32 × 32 分割  
図-3 中心軸における流速図

b) 解析結果・考察

中心軸上の流速分布図 ( $Re=10000, \Delta t = 10^{-3}$ ) を図-3 に示す。要素分割数による比較では、16 × 16 分割では、直接法、分離型解法共に、領域側面近郊では、Ghia らの解析値<sup>2)</sup> との差異が大きくなっているのが確認できる。しかし、32 × 32 分割であると、両手法とも Ghia らの解析値<sup>2)</sup> と良い一致を示していることが確認できる。次に、表-1 に計算時間を示す。1step に必要な計算時間は分離型解法が短い、直接法では  $\Delta t$  が大きくとれるため、直接法は分離型解法より短時間で計算ができる結果となった。また、16 × 16 分割における、分離型解法の記憶容量は直接法の 27.6 % となった。

(2) 2次元円柱周り流れ問題

圧力の境界条件が解析結果に及ぼす影響について検討するため、2次元円柱周り流れ問題を取り上げた。

a) 解析条件

解析領域、境界条件を図-4 に示す。なお、分離型解法では流出境界に  $p=0.0$  を与えた。図-4 の解析領域において圧力の境界条件の影響を見るために、解析領域後方から  $x$  軸方向を無次元長さ  $2D$  ずつ狭めていき、数値解析を行った。 $x$  軸方向長さ  $27D$  における有限要素分割図を図-5 に示す。節点数 8200, 要素数 16000, 最小分割幅  $0.012D$  とした。Reynolds 数は  $Re=100$ , 微小時間増分量において、直接法は  $\Delta t = 10^{-2}$ , 分離型解法は  $\Delta t = 10^{-3}$  で解析を行った。

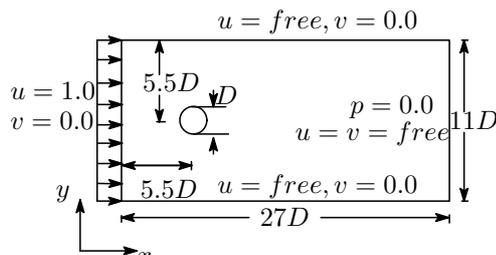


図-4 解析領域・境界条件

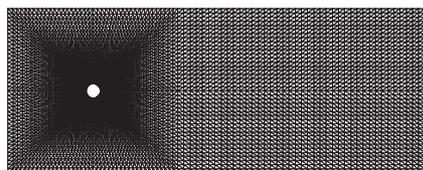


図-5 有限要素分割図

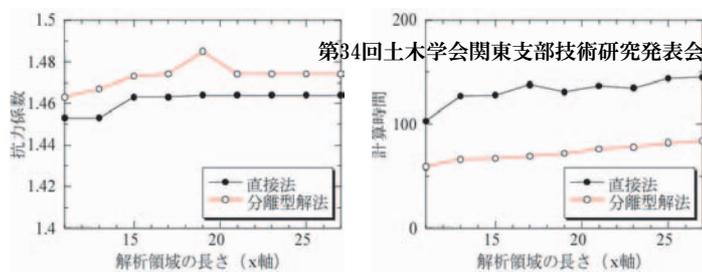
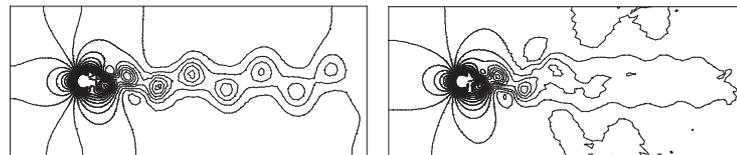


図-6 抗力係数

図-7 計算時間



(a) 直接法

(b) 分離型解法

図-8 圧力分布図 ( $Re=100$   $x$  軸方向長さ  $27D$ )

b) 解析結果・考察

各解析領域における抗力係数を図-6 に示す。両手法とも  $x$  軸方向長さに関わらず、ほぼ一定の抗力係数を示していることがわかる。また、Cantwell らの実験値<sup>3)</sup> 1.45 と良い一致を示していることが確認できる。しかし、図-8 に示す圧力分布図 ( $Re=100, x$  軸方向長さ  $27D$ ) を比較すると、分離型解法では解析領域後方で、渦が消されてしまうことが確認できる。そのため、分離型解法では円柱から流出境界まで、一定の距離をとる必要がある。次に、各  $x$  軸方向長さにおける計算時間を図-7 に示す。各  $x$  軸方向長さでの計算時間の差は、さほど見られなかったが、両手法を比べると、分離型解法の方が短時間で計算できる結果となった。これは非定常問題であるため、直接法は 1step 毎の計算時間が大きくなり、 $\Delta t$  を大きくとっても分離型解法よりも計算時間が長くなったと考えられる。また、 $x$  軸方向長さ  $27D$  における、分離型解法の記憶容量は、直接法の 22.3 % となった。

4. おわりに

本論文は、非圧縮粘性流体の有限要素解析において、比較する手法として直接法と分離型解法の 2 手法を取り上げた。数値解析例を通して、計算時間、解析精度、記憶容量の観点から比較検討を行った。

- 両手法とも解析値、実験値と良い一致を示していることが確認できた。流出境界付近において、分離型解法であると渦が消されてしまうことが確認できた。
- 計算時間において、直接法は数値解析例の現象に左右される事が確認できた。
- 分離型解法では直接法の約 1/4 の記憶容量ですむため、大規模計算向きである。

今後の課題として、更なる数値解析例の検討が挙げられる。

参考文献

- 1) T.E.Tezduyar : Stabilized finite element formulations for incompressible flow computations, *Advance in applied Mechanics*,**28**,pp1-44,1991.
- 2) U.Ghia,K.N.Ghia,C.T.Shin, 'High-Re Solution for Incompressible Flow Using the Navier-Stokes Equations and a Method', *Journal of Computational Physics*,**48**,pp387-411,1982
- 3) Cantwell B. and Coles, D. : An experimental study of entrainment and transport in the turbulent near wake of a circular, *J.Fluid mech*, **136**, pp.321-374, 1983.