大変形固体解析のための非構造格子に基づく Eulerian 解析

中央大学大学院　学生員　山田　豊
中央大学　学生員　○寺沢　英之
中央大学　正会員　樫山　和男
広島大学　正会員　岡澤　重信

1.　はじめに

塑性加工や衝撃問題の解析においては，極めて大きな変形や複雑な解析形状を取り扱うことが可能な数値解析手法が必要となる．固体解析における定式化では，一般に，物質の変形に追従した観測点において変形を記述する Lagrangian 解法が用いられる．この Lagrangian 解法では，長所として固体境界面を正確に捉えることができるが，大変形問題においては，計算要素の破綻に起因する計算の破綻が度々生じる．一方，空間に固定された観測点において変形を記述する Eulerian 解法[1]では，固体の境界形状を流体計算における自由表面と同様に取り扱うことにより，任意の大変形の取扱いが可能となる．

既往の研究においては，四角形要素に基づく構造格子を用いた Eulerian 解法が提案されている[2),3)]．しかし，複雑な形状を有する解析領域を取り扱う場合には，四角形要素に基づく構造格子では適用性において難がある．

そこで，本研究では任意形状への適合性に優れた有限要素法に着目し，複雑形状を有する固体の大変形問題に対して安定かつ高精度な数値解析手法の構築を目的として，非構造格子に基づく Eulerian 有限要素法の構築を行った．数値解析例として，棒の衝突解析を取り上げ，本手法の有効性を検討した．なお，発表時には，任意形状を対象とした数値解析例の発表を予定している．

2.　Eulerian 解法の支配方程式

(1)　operator split 法

Eulerian 解法における支配方程式は，次式のように表される．

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}} = f \tag{1}$$

ここで，$\mathbf{u}$，$\mathbf{x}$ はそれぞれ速度ベクトル，位置ベクトルを表す．式 (1) に対して，operator split 法を用いて次式のように 2 つに分割する[2)]．

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = f \tag{2}$$

$$\frac{\partial \Phi^*}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \frac{\partial \Phi^*}{\partial \mathbf{x}} = 0 \tag{3}$$

式 (2) は，外力項を含んだ非移流ステップ, 式 (3) は，移流項を含んだ移流ステップにおける方程式である．このとき式 (3) における $*$ 印は，非移流ステップ後の値を意味し，式 (3) において，応力，ひずみ等の非移流ステップ後の解を固定の計算要素に投影させている．

(2)　非移流ステップ（動的陽解法）

operator split 法における非移流ステップにおいては，通常の動的陽解法をそのまま用いる．

$$\overline{M}\dot{\mathbf{u}}^{\mathbf{n}} + \mathbf{F}^{\mathbf{n}}_{\mathbf{int}} = \mathbf{F}^{\mathbf{n}}_{\mathbf{ext}} \tag{4}$$

ここで $\overline{M}$ は，対角化された集中質量行列，$\mathbf{F_{int}}$ は内力ベクトル，$\mathbf{F_{ext}}$ は外力ベクトルを表わす．また上添字 n は，現時刻ステップであることを意味する．式 (4) に対して，中央差分法を適用させると時刻 t^{n+1} の位置ベクトル $\mathbf{x}^{n+1}$ 及び，時刻 $t^{n+\frac{1}{2}}$ の速度ベクトル $\mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}}$ は，次式のように求めることができる．

$$\mathbf{x^{n+1}} = \mathbf{x^n} + \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}}\Delta t \tag{5}$$

$$\mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}} = \mathbf{u}^{n-\frac{1}{2}} + \dot{\mathbf{u}}^n \Delta t \tag{6}$$

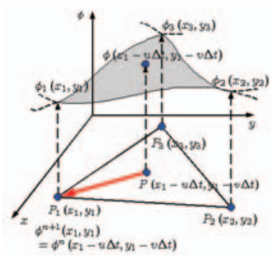
このとき加速度ベクトル $\dot{\mathbf{u}}^n$ は，式（4）において，$\bar{M}$ が集中質量行列であるため連立一次方程式を解く必要がない．

(3)　移流 ステップ（CIVA 法）

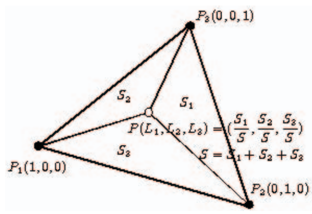
本研究では，自由境界面を表現するために，VOF 法を適用する．また，移流方程式の解法には高精度移流スキームとして知られる CIVA 法[4)] を適用する．CIVA 法の計算方法は，移流方程式の厳密解である式 (7) を用いて，$\phi^{n+1}(\mathbf{x}, t)$ の解を求めるために，$t-\Delta t$ の値である $\phi^n(\mathbf{x}-\mathbf{u}\Delta t, t-\Delta t)$ を用いる．なお，上流点 $\mathbf{x}-\mathbf{u}\Delta t$ に位置する ϕ^n の値は，図-1 のように上流側の要素内で補間することによって求める．また，上流側の要素に対する 3 次補間曲面は，図-2 の面積座標（L_1, L_2, L_3）を用いて式 (8) のように表現できる．

$$\phi^{n+1}(\mathbf{x}, t) = \phi^n(\mathbf{x} - \mathbf{u}\Delta t, t - \Delta t) \tag{7}$$

$$\phi(L_1, L_2, L_3) = \sum_{i=-1}^{3} \alpha_i L_i + d \sum_{j,k=1 j\neq k}^{3} \beta_{jk}(L_j^2 L_k + cL_1L_2L_3) \tag{8}$$



図－1　上流点の評価方法

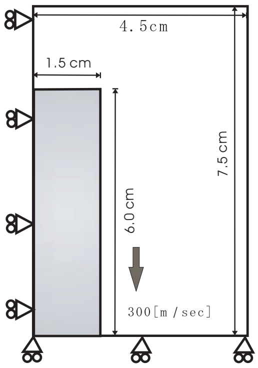


図－2　面積座標

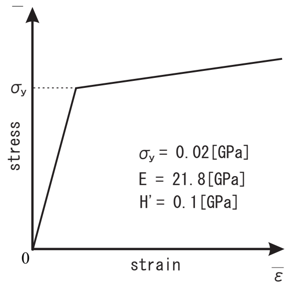
KeyWords：　Eulerian 解法，大変形固体解析，非構造格子
連絡先：　〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27　E-mail: d33137@educ.kc.chuo-u.ac.jp

3. 数値解析例

数値解析例として，棒の衝突解析を取上げる．数値解析モデルは，図-3 に示すように鋼材に対して鉛直下向きに初期速度 300(m/sec) 与える．また材料特性は，図-4 に示されるようにバイリニア硬化型の J_2 流れ則を使用し，ポアソン比は 0.28，密度は 1710(kg/m^3) を仮定する．また，解析要素には粗密の無い Mesh1 と粗密のある Mesh2 の 2 種類の非構造格子を用いた．本手法の有効性を検討するために，四角形要素の Lagrangian 解析を参照解とし，比較検討を行う．



図－3　解析モデル



図－4　材料定数

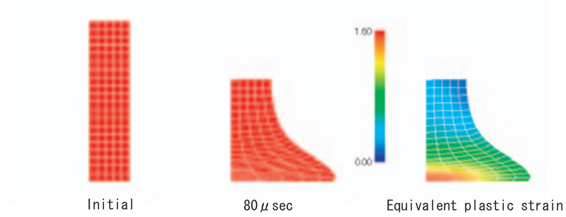
図-5 に参照解となる Lagrangian 解析，図-6，7 に本解析における初期形状，80μsec 後の変形形状および相当塑性ひずみ分布の様子を示す．また，図-8 に下端部での先端変位の時刻歴を示す．これらの結果より，変形形状に関しては，均一な要素サイズの非構造格子 Mesh1 だけでなく，粗密付けを行った Mesh2 においても Lagrangian 解析ほぼ同等の挙動を捉え，安定に解析を行えていることが確認できる．ただし，本手法は Lagrangian 解析と比較して，棒の先端部分における相当塑性ひずみの分布に差異が見られた．また，先端変位の時刻歴に関して，本手法は Lagrangian 解析に比べ若干進行に遅れが生じているが，定性的に挙動を捉えていることが確認できる．

4. おわりに

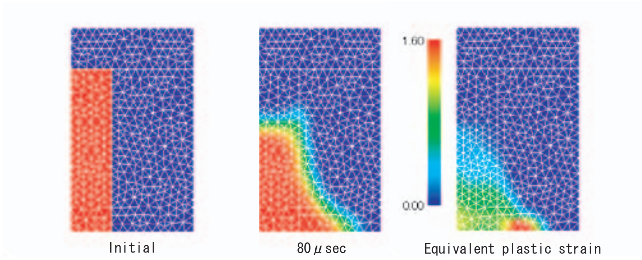
本研究では，複雑形状を有する固体の大変形問題に対して安定かつ高精度な数値解析手法の構築を目的として，非構造格子に基づく Eulerian 有限要素法の構築を行った．数値解析例を通じて以下の結論を得た．

- 本手法による結果は，要素サイズが均一なメッシュだけでなく粗密付けを行ったメッシュにおいても定性的に変形の挙動を捉え，安定に解析を行えていることが確認された．
- 本手法による結果は，従来の Lagrangian 解析に比べ，先端変位の進行に若干の遅れが見られた．また，相当塑性ひずみの分布において先端部分に差異が見られた．これらの検討を今後の課題としたい．

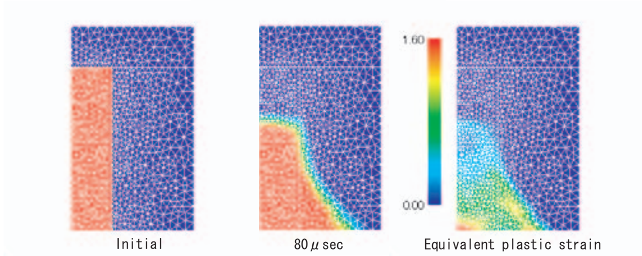
以上のことから，本手法の妥当性が示せたと言える．今後は，構造格子では対応出来ない複雑な解析形状を有する問題への適用を行う予定である．



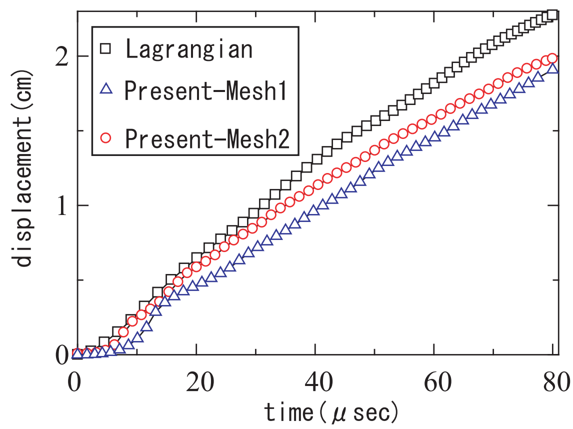
図－5　Lagrangian



図－6　Present - Mesh1（粗密なし）



図－7　Present - Mesh2（粗密あり）



図－8　棒下端部の先端変位の時刻歴

参考文献

1) Benson,D.J. : Computational methods in Lagrangian and Eulerian hydrocodes, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*,99,pp.235-394,1992.
2) 岡澤重信，河口篤志，藤久保昌彦：各種メッシュ制御における動的陽解法，応用力学論文集，土木学会，Vol.6，pp151-158，2003.
3) 金子恭久，樫山和男，岡澤重信：安定化有限要素法を用いた Eulerian 解法による固体の大変形解析，応用力学論文集，土木学会，Vol.8，pp311-317，2005.
4) 田中伸厚：数値流体力学のための高精度メッシュフリー手法の開発，日本機械学会論文集（B編），64 巻 620 号，1998.