

浅水長波流れ解析における安定化有限要素法による高精度化

中央大学大学院 学生員 ○川合 伸宜
中央大学 正会員 田中 聖三
中央大学 正会員 檜山 和男

1. はじめに

海岸, 河川, 湖沼などの水環境流れは, 浅水長波方程式により記述することができる. これらの現象は複雑な自然地形を対象とすることが多いため, 数値解析を行う際には, 任意形状への適合性に優れた有限要素法は有効であるといえる. 既往の研究において, 安定化有限要素法を支配方程式に適用した場合, 計算結果は衝撃捕捉項の安定化パラメータ^{1), 2)}の影響を受けることが知られている.

そこで, 本研究は浅水長波流れ解析の高精度化を目的とし, 衝撃捕捉項のパラメータの検討するものである. 本研究で提案する安定化パラメータは, Tezduyar ら²⁾が圧縮性流れ解析に提案したものを基本として, 浅水長波流れ解析に適応させたものである. 数値解析例として, 障害物のあるダムブレイク問題³⁾を取り上げ, 本研究で提案する安定化パラメータの有効性および適用性の検討を行った.

2. 数値解析手法

(1) 支配方程式

支配方程式には, 以下に示す浅水長波方程式を用いる.

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A}_i \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{x}_i} + \mathbf{N}\mathbf{U} - \mathbf{R} = 0 \quad (1)$$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} h \\ uh \\ vh \end{bmatrix} \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 \\ c^2 \frac{\partial z}{\partial x} \\ c^2 \frac{\partial z}{\partial y} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ c^2 - u^2 & 2u & 0 \\ -uv & v & u \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -uv & v & u \\ c^2 - v^2 & 0 & 2v \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{u_*}{h} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{u_*}{h} \end{bmatrix}, \quad u_* = \frac{gn^2 \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{1/3}}$$

ここに, $\mathbf{U}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{A}_i$, $\mathbf{N}$ はそれぞれ未知ベクトル, 勾配ベクトル, 移流行列, 摩擦行列である. また, h , u , v , z , u_* は全水深, x , y 方向断面平均流速, 標高, 摩擦速度である. なお, g , n はそれぞれ重力加速度, Manning の粗度係数である.

(2) 重み付き残差方程式

支配方程式 (1) に, 空間方向の離散化として SUPG 法に基づく安定化有限要素法を適用すると, 以下の重み付き残差方程式が得られる.

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \mathbf{U}^* \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A}_i \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{x}_i} + \mathbf{N}\mathbf{U} - \mathbf{R} \right) d\Omega \\ & + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_e} \tau \left(\mathbf{A}_j^T \frac{\partial \mathbf{U}^*}{\partial \mathbf{x}_j} \right) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A}_i \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{x}_i} + \mathbf{N}\mathbf{U} - \mathbf{R} \right) d\Omega \\ & + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_e} \delta \left(\frac{\partial \mathbf{U}^*}{\partial \mathbf{x}_i} \right) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{x}_i} \right) d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

式 (2) の左辺第 1 項は Galerkin 項であり, 第 2, 3 項の要素ごとの積分の総和項はそれぞれ SUPG 項, 衝撃捕捉項である. なお, $\mathbf{W}$ は重み関数である. また, SUPG 項の τ および衝撃捕捉項の δ は安定化パラメータ^{1), 2)}である. 時間方向の離散化として 2 次精度を有する Crank-Nicolson 法を用いた. また, 連立一次方程式の解法には, Element-by-Element Bi-CGSTAB 法を適用する.

(3) 安定化パラメータ

衝撃捕捉項は不連続面における数値振動を制御するものであり, 式 (2) の δ は式 (3) のように定義する. Case1 は従来より用いられている流速に依存するものであり, Case2, Case3 が本研究で提案するものである.

$$\delta = \tau_{shoc} (||\mathbf{u}_{int}||)^2 \quad (3)$$

Case1

$$\tau_{shoc} = \left(\sum_{\alpha=1}^{n_{en}} |\mathbf{u} \cdot \nabla N_{\alpha}| \right)^{-1} \quad (4)$$

$$||\mathbf{u}_{int}|| = ||\mathbf{u}|| \quad (5)$$

ここに, h_e は要素サイズである.

Case2

Case2 は Case1 に浅水長波流れの代表的速度である波速, 水位の二階微分を考慮に加えたものである.

$$\tau_{shoc} = \left(\sum_{\alpha=1}^{n_{en}} (c|\mathbf{j} \cdot \nabla N_{\alpha}| + |\mathbf{u} \cdot \nabla N_{\alpha}|) \right)^{-1} \left(\frac{|\nabla^2 H^e|}{|\nabla^2 H^e|_{max}} \right) \quad (6)$$

$$H = h + z, \quad \mathbf{j} = \frac{\nabla H}{||\nabla H||}, \quad ||\mathbf{u}_{int}|| = \sqrt{||\mathbf{u}||^2 + c^2} \quad (7)$$

ここに, N_{α} は形状関数である.

Case3

Case3 は Case2 の式 (6) に以下のように水深に関する無次元の項を考慮に加えたものである.

KeyWords: 安定化有限要素法, 浅水長波流れ, 衝撃捕捉項, 安定化パラメータ

連絡先: 〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27 E-mail: kawai@civil.chuo-u.ac.jp

$$\tau_{shoc} = \left(\sum_{a=1}^{n_{en}} (c|\mathbf{j} \cdot \nabla N_a| + |\mathbf{u} \cdot \nabla N_a|) \right)^{-1} \left(\frac{|\nabla^2 H^e|}{|\nabla^2 H^e|_{max}} \right) \left(\frac{h_{max} - h_{min}}{h^e} \right) \quad (8)$$

$$\|\mathbf{u}_{int}\| = \sqrt{\|\mathbf{u}\|^2 + c^2} \quad (9)$$

ここに, h^e は各要素の平均水深である. なお, h_{max} , h_{min} はそれぞれ解析領域における水深の最大値, 最小値である. また, SUPG 法は移流項の卓越による数値不安定性を制御するものであり, 式 (2) の τ は以下のように定義する. なお, τ は各ケース統一とする.

$$\tau = \left(\frac{1}{(\tau_{sugn1})^2} + \frac{1}{(\tau_{sugn2})^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (10)$$

$$\tau_{sugn1} = \left(\sum_{a=1}^{n_{en}} (c|\mathbf{j} \cdot \nabla N_a| + |\mathbf{u} \cdot \nabla N_a|) \right)^{-1} \quad (11)$$

$$\tau_{sugn2} = \frac{\Delta t}{2} \quad (12)$$

ここに, Δt は微小時間増分量である.

(4) 移動境界手法

本研究では, 浅水長波流れの移動境界手法として Euler 的手法を用いる. Euler 的手法とは, あらかじめ解析領域を有限要素分割しておき, 毎時間ステップにおいて各要素が陸域か水域かを判定する手法である. この手法では陸水判定に用いる微小水深が水際線の移動に影響を及ぼすため, 現象に即した微小水深の値を用いて陸水判定を行う必要がある.

3. 数値解析例

(1) 障害物のあるダムブレイク問題³⁾

ここに, 各安定化パラメータの有効性を検証するために図 - 1 に示す, 障害物のあるダムブレイク問題を取り上げる. 有限要素分割は三角形要素を使用し, 総節点数 765, 総要素数 1216, x 方向分割幅 0.25[m], y 方向分割幅 0.25[m] である. マニングの粗度係数は平面部で 0.0125[s/m^{1/3}] であり, 障害物部では 0.011[s/m^{1/3}] である. 境界条件としては, 壁面において slip 条件を与え, 右端境界を自由流出境界とした. また, 微小時間増分量は 0.01[s] とし, 計算を行った.

図 - 2 ~ 3 に各地点における水位の時刻歴の計算結果を示す. 各地点において, 計算結果と実験値の傾向は概ね一致している. 障害物の手前の点である G4, G10 において, 各パラメータによる計算結果は位相の差が見られる. 実験値と比較すると本研究で提案する Case3 が最も良い一致を示していることがわかる. G10 および障害物の斜面の点である G11, 障害物の頂点である G13 においては, 各パラメータともに水位を過大評価しており, ピーク値付近にて振動が見られる.

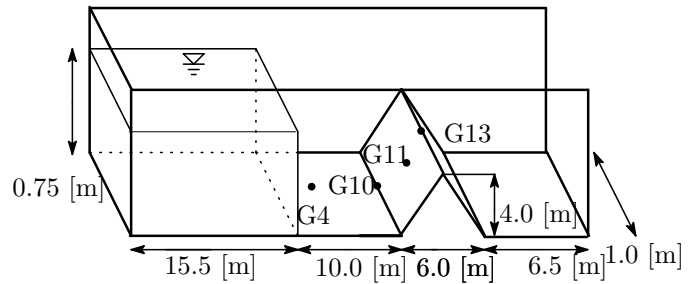


図 - 1 解析モデル

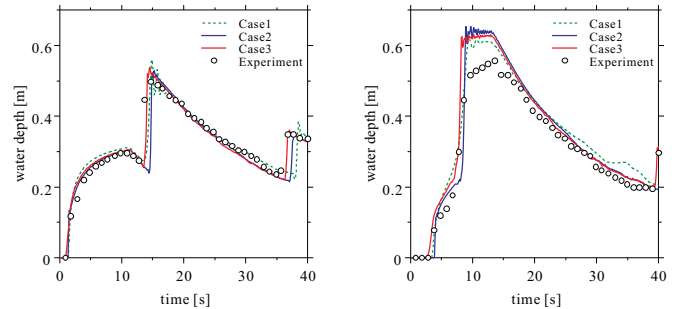


図 - 2 水位の時刻歴の比較 Point - G4(左), G10(右)

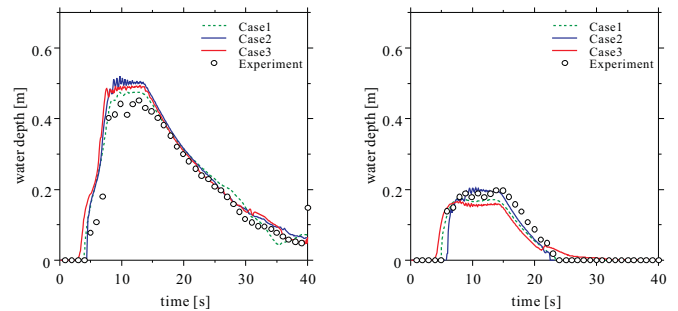


図 - 3 水位の時刻歴の比較 Point - G11(左), G13(右)

4. おわりに

本研究は安定化有限要素法による浅水長波流れ解析の高精度化を目的とし, 衝撃捕捉項の安定化パラメータを提案し, その比較, 検討を行った.

その結果, 本研究で提案した安定化パラメータ Case3 の計算結果は, 既往のパラメータ Case1 に比べ, 位相の遅れが低減され, 実験値と良い一致を示し, 有効性が確認された.

今後の課題として, 本パラメータの津波氾濫解析への適用を行う予定である.

参考文献

- 1) T.E.Tezduyar, Y.Osawa: Finite element stabilization parameters computed from element matrices and vectors, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **190**, pp411-430, 2000.
- 2) T.E.Tezduyar, M.Senga: Determination of the shock-capturing parameters in SUPG formulation of compressible flows, *Computational Mechanics*, WCCM VI in conjunction with APCOM'04, Beijing, 2004.
- 3) P.Brufau, M.E.Vázquez-Cendón and P.García-Navarro: A numerical model for the flooding and drying of irregular domains, *International Journal of Numerical Methods in Fluids* **39**, pp247-275, 2002.