

薄板の数値解析に及ぼす境界条件の影響に関する一考察

足利工業大学大学院 学生会員 ○鈴木 崇司
足利工業大学 正会員 末武 義崇

1. まえがき

薄板の曲げ問題に対する解析的な研究については、従来から多くの研究報告がなされている。近年では、エレメントフリー法(EFGM)などの新しいアプローチの数値解析手法も考案され、板やシェルの解析に適用されている。しかしながら、ある種の境界条件の下では、Timoshenko の著書¹⁾に述べられている Fourier 解析的手法による結果と、数値解析手法による結果とが、必ずしも一致しないことが指摘されている。

そこで本研究では、周辺固定された矩形平板を解析対象とし、Fourier 解析の手法と数値解析の手法の両者を用いて解析を行い、両者の定量的な比較を試みた。Fourier 解析の手法としては拡張三角級数²⁾による手法を用い、数値解析の手法としては Lagrange 多項式に基づく EFGM³⁾を選択した。両者の比較を通じて、薄板の数値解析に及ぼす境界条件の影響について、定量的に検討する。

2. 任意境界条件に対応した Fourier 解析

薄板の曲げに関する基礎式は次式で与えられる。

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{1}{D} p(x, y) \quad (1)$$

ここで、 w は板中央面のたわみ、 D は板の曲げ剛性、 $p(x, y)$ は平板に作用する横荷重である。

本研究では、任意の組み合わせの境界条件に対応し得るように、次式のような三角級数を導入する。

$$w(x, y) = \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{m=-M}^M W_{1,m}(y) \exp\left(\frac{im\pi}{a} x\right) + \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N W_{2,N}(x) \exp\left(\frac{in\pi}{b} y\right) \quad (2)$$

ここで、 a および b はそれぞれ x および y 軸方向の矩形平板の幅の半分、 i は虚数単位である。

荷重関数 $p(x, y)$ を Fourier 級数に展開し、式(1)に式(2)を代入して得られた常微分方程式を解けば、 $8(M+N+1)$ 個の任意定数を含む基礎微分方程式の一般解を求めることができる。

得られたたわみの一般解に、平板周辺の境界条件を適用すれば、任意定数を求めるための決定方程式を導くことができる。その際、境界上の変数、すなわち、 x あるいは y のべき乗および双曲線関数を Fourier 級数展開して和の順序を交換すれば、 $8(M+N+1)$ 個の決定方程式が得られる。結果的に、未知量の個数と条件式の個数とを一致させることが可能となる。

3. EFGM による周辺固定板の解析

薄板の曲げに関する全ポテンシャルエネルギーは次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{D}{2} \int_0^b \int_0^a \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right. \\ & \left. + 2\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} dx dy \\ & - \int_0^b \int_0^a p(x, y) w dx dy \\ & + \sum_{k=1}^4 \alpha_i \int_{C_i} \left\{ \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \text{ or } \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right\} ds \end{aligned} \quad (3)$$

ここで、 ν は Poisson 比、 α_i はペナルティー係数である。式(3)右辺における最後の項は、4つの境界边上でたわみ角をゼロとするために導入した項である。

本研究で用いた EFGM³⁾は、節点のたわみを未知量として用いているために、境界上のたわみをゼロとする基本境界条件については、入力データとして直接的に適用することができる。一方、たわみ角ゼロ

Key Words: 薄板, 境界条件, Fourier 級数, 数値解析, EFGM.

の条件についてはペナルティー法を用いて考慮している。

4. 解析モデル

本研究では、図-1に示すような全面等分布荷重 p_0 が作用する周辺固定板を解析対象とした。

数値計算にあたっては、Poisson 比 $\nu = 0.3$ とした。Fourier 解析に際しては、級数の項数を一方向(x あるいは y)に 100 項とした。また、EFGM 解析の際に用いたパラメータは、影響半径を $\rho = 0.8$ 、Gauss 積分次数を 8、セル総数を $5 \times 5 = 25$ とした。板の縦横比については 1.0 ~ 2.0 の範囲で変化させた。

5. 解析結果

今回の解析では、拡張三角級数を用いた Fourier 解析および EFGM 解析によって、板中央点におけるたわみを算出した。両者の比較にあたっては、Fourier 解析の結果を基準とした時の、EFGM 解析の絶対誤差を算定した。

解析結果を図-2に示す。図中、縦軸に解析誤差、横軸に縦横比 b/a をそれぞれとって表示した。図には、比較のために、周辺固定支持板の解析結果と共に、周辺単純支持板の結果も示した。丸印のプロットが固定支持板の結果、ひし形のプロットが単純支持板の結果にそれぞれ対応している。

図-2を見ると、Fourier 解析と EFGM 解析の結果には、たわみの値に若干の差異が認められる。しかしながら、両者の解析誤差は境界条件の相違に依らず、最大でも 1% 未満と極めて小さい。従って、少なくとも周辺固定の境界条件については、周辺単純支持の場合と同程度の誤差に止まっており、Fourier 解析と数値解析との間には、顕著な差異は認められない。

周辺固定支持板と周辺単純支持板の結果を比較すると、前者の解析誤差が板の縦横比の変化に伴って比較的滑らかに変動しているのに対し、後者では誤差の変動が目立っている。これは、周辺固定支持板の場合、汎関数のペナルティー部が、式(3)のようにたわみの 1 階微分で評価されるのに対し、周辺単純支持板の場合はたわみの 2 階微分で与えられるためだと考えられる。

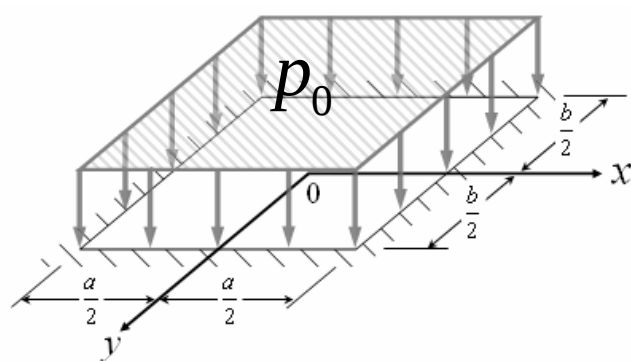


図-1 全面等分布荷重を受ける周辺固定支持板

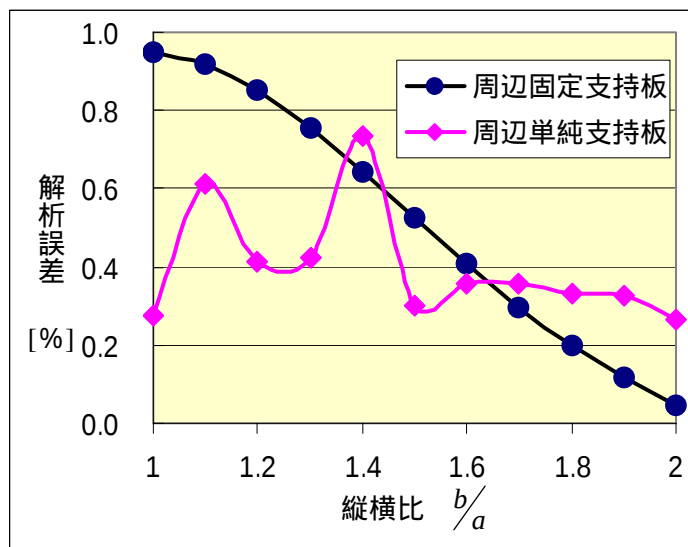


図-2 周辺固定支持板および周辺単純支持板の Fourier 解析と EFGM の解析誤差

6. 結論

本研究では、全面等分布荷重が作用する矩形平板を対象とし、拡張三角級数を用いた Fourier 解析および EFGM 解析を行い、その結果から、数値解析に及ぼす境界条件の影響について考察を行った。

Fourier 解析と EFGM 解析の比較から、境界条件として周辺固定支持を適用した場合と、周辺単純支持を適用した場合には、決定的な相違は見られないことが明らかになった。

今後は、今回考慮した周辺固定支持および周辺単純支持以外の境界条件についても、定量的な検討を実施する予定である。

参考文献

- 1) S.P.Timoshenko, S.Woinowsky-Krieger (長谷川節訳): 板とシェルの理論, ブレイン図書出版, 1994.
- 2) Y.Suetake, M.Hirashima: J. of Eng. Mech., Vol.123, No.4, Apr., pp.293-301, 1997.
- 3) Y.Suetake: J. of Eng. Mech., Vol.128, No.2, Feb., pp.231-239, 2002.