

# 動的な外乱を受ける構造物の損傷同定

武蔵工業大学 正会員 丸山 収

## 1. はじめに

本研究では、動的な外乱を受ける構造物の減衰係数と地震時復元力特性を同定する手法について検討した。ここでは、同定のために設定した2次形式の評価関数を最小とすることにより、非線形 Euler-Lagrange 式で与えられる2点境界値問題へと定式化を行い、Shooting 法により解く手法の提案を行っている。本研究の有効性は、事前に復元力特性の挙動を表現するモデルを必要としない点であり、加えて同一の定式化により減衰係数と任意復元力の経時変化を同定できる点である。

## 2. 対象構造系と問題の定式化

図-1に示した本研究で対象とする3自由度非線形系の支配方程式を次式で与える。

$$\mathbf{M}\mathbf{Z}(t) + \mathbf{C}\mathbf{Z}(t) + \mathbf{K}\Phi(t) = -\mathbf{M}\mathbf{E}\ddot{f}(t) \quad (1)$$

ここで、 $\mathbf{Z}(t)$ ：相対変位応答、 $\mathbf{M}$ ：質量行列、 $\mathbf{C}$ ：減衰係数行列、 $\mathbf{K}$ ：初期剛性行列、 $\Phi(t) = [\phi_1(t), \phi_2(t), \dots, \phi_n(t)]^T$ ：復元力特性ベクトル、 $\ddot{f}(t)$ ：地震入力加速度、 $\mathbf{E}$ ：入力係数行列である。ここで、 $\mathbf{I}$ ：単位行列である。

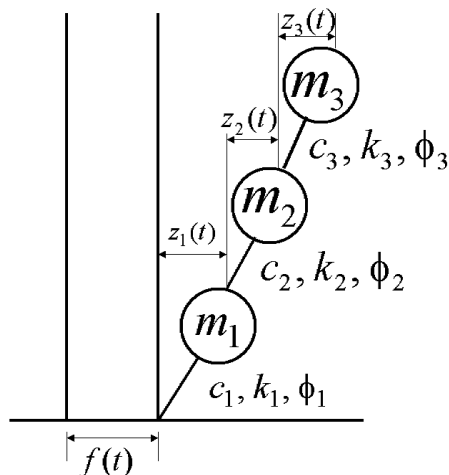


図-1 3自由度非線形振動系

次に各質点の変位、速度応答、減衰係数、復元力を  $x_1 = z_1, x_2 = z_2, x_3 = z_3, x_4 = \dot{z}_1, x_5 = \dot{z}_2, x_6 = \dot{z}_3,$

$x_7 = c_1, x_8 = c_2, x_9 = c_3, x_{10} = k_1\phi_1, x_{11} = k_2\phi_2, x_{12} = k_3\phi_3$  と状態空間表示し、同定のための非線形状態方程式を次式で与える。

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{X}(t), \mathbf{d}(t), \ddot{f}(t)) \quad (2)$$

式(3)を具体的に示すと以下のようになる。

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \\ \dot{x}_7 \\ \dot{x}_8 \\ \dot{x}_9 \\ \dot{x}_{10} \\ \dot{x}_{11} \\ \dot{x}_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ (-x_7x_4 + x_8x_5 - x_{10} + x_{11})/m_1 - \ddot{f}(t) \\ (x_7x_4 - x_8x_5 + x_{10} - x_{11})/m_1 \\ + (x_9x_6 - x_8x_5 - x_{11} + x_{12})/m_2 \\ (x_8x_5 - x_9x_6 + x_{11} - x_{12})/m_2 \\ -(x_9x_6 + x_{12})/m_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \\ d_6 \end{bmatrix} \quad (3)$$

式(3)の左辺  $\dot{\mathbf{X}}(t)$  は状態ベクトルの時間微分を表している。ここで、式(3)の右辺第1項に着目すると、減衰係数と復元力に対応する状態量の時間微分が0となるように定式化している。その代わりに時間関数  $\mathbf{d}(t)$  に関する第2項を与えている。復元力の挙動を表現する数式モデルを与えれば、モデルから各時刻の微分係数を要素とするヤコビアン行列が計算できるので、ニュートン法、拡張カルマンフィルターなどの同定手法の適用が可能となる。本研究では、 $\mathbf{d}(t)$  の成分である減衰係数および復元力に対して時間関数であること以外に、特定の数式モデルを仮定することなく議論を行う。

一方、観測方程式を次式で与える。

$$\mathbf{Y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{X}(t) + \mathbf{V}(t) \quad (4)$$

ここで、 $\mathbf{V}(t)$ ：観測ノイズであり、 $\mathbf{C}$  は、 $(6 \times 12)$  行列であり、各質点において相対変位応答および相対速度応答が観測されるものとすれば、その成分は、

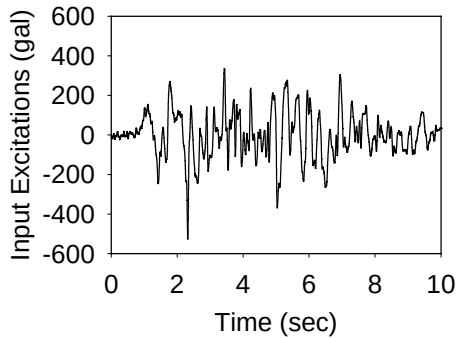


図-2 入力地震波形

$(1,1) = (2,2) = (3,3) = (4,4) = (5,5) = (6,6) = 1.0$  であり、他の成分はすべて0である。

### 3. 同定問題の評価関数

同定問題の定式化を行うために、次式で与えられる時刻  $t$  における2次形式の関数を考える。

$$L[\mathbf{X}(t), \mathbf{d}(t)] = (\mathbf{Y}(t) - \mathbf{C}[\mathbf{X}(t)])^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{Y}(t) - \mathbf{C}[\mathbf{X}(t)]) + \mathbf{d}^T(t) \mathbf{W} \mathbf{d}(t) \quad (5)$$

ここで、 $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{W}$  : 重み行列である。

式(5)に式(2)により与えられる拘束条件を考慮し、時間方向の積分値を最小とする問題を考える。

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \{L[\mathbf{X}(\tau), \mathbf{d}(\tau)] + \lambda^T(\tau) (F[\mathbf{X}, \mathbf{d}, \ddot{\mathbf{f}}] - \dot{\mathbf{X}}(\tau))\} d\tau \quad (6)$$

ここで、 $t_0$  : 初期時刻,  $t_f$  : 終端時刻であり、 $\lambda(\tau)$  : Lagrange の未定乗数である。

式(6)の最小化を近似的に行うことで、 $\mathbf{d}(t)$  を求めるための必要条件を得る。ここで境界条件は、 $\mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0$  として与えられる場合を考えると、 $\lambda(t_f) = 0$  であり、一方  $\mathbf{X}(t_f)$ ,  $\lambda(t_0)$  は未定の2点境界値問題となる。

$$\mathbf{d}(t) = \frac{1}{2} \mathbf{W}^{-1} \mathbf{G}^T \lambda(t) \quad (7)$$

$$\dot{\lambda}(t) = 2\mathbf{C}^T \mathbf{R}^{-1} [\mathbf{Y} - \mathbf{CX}] - \left[ \frac{\partial F[\mathbf{X}, \mathbf{d}, \ddot{\mathbf{f}}]}{\partial \mathbf{X}} \right]^T \lambda(t) \quad (8)$$

本研究では、式(2)または式(3)の状態方程式が非線形関係となっているために、式(8)も非線形の2点境界値問題として与えられる。この式を理論的に解くことは困難であるために、本研究では、Shooting法により解くこととする。Shooting法は、数値計算を繰り返し行うことで発見的に境界値を満足する解を見出す手法である。

### 4. 計算例

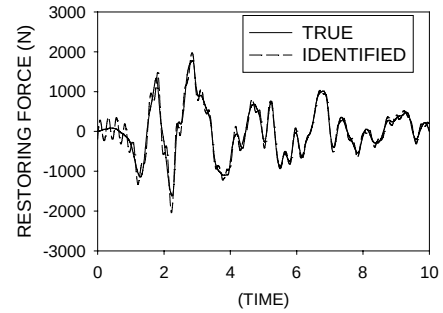


図-3 質点1の復元力の推定結果

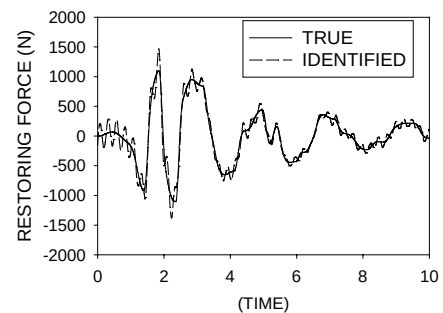


図-4 質点2の復元力の推定結果

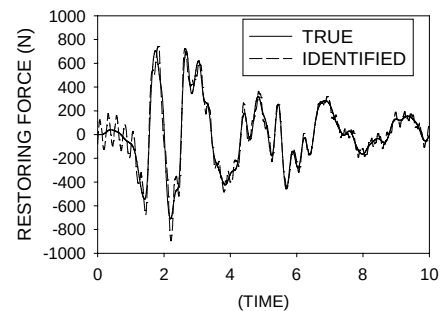


図-5 質点3の復元力の推定結果

本研究では、図-1に示す3自由度せん断型振動系を例題として解析例を示す。はじめに、図-2に示す入力加速度波形を用いて、観測データを作成した。その際、 $m_1 = m_2 = m_3 = m$ ,  $c_1 = c_2 = c_3 = c$  および  $k_1 = k_2 = k_3 = k$  とした。観測データを作成する際に非線形復元力は、強度および剛性の劣化を考慮した Bouc and Wen モデル<sup>1)</sup>を用いて算出した。これは、提案手法の精度を検討するときに、既知の復元力と比較するためである。図-3から図-5に復元力の時系列の推定結果を示しているが真値と比較してよい対応を示していることがわかる。減衰の推定結果に関しては、講演時に示すが、同様に精度よく推定された。

参考文献:1) Wen, Y.K.: Method for Random Vibration of Hysteretic Systems, *Jour. of Engineering Mechanics*, Vol.102, No.EM2, pp.249-243, April, 1976.