乱流において波状壁面上に働く壁面せん断応力に関する研究

中央大学大学院　　学生員　○五十嵐　剛　　　中央大学理工学部　　正会員　　　　山田　拓也
中央大学理工学部　　フェロー会員　　山田　正

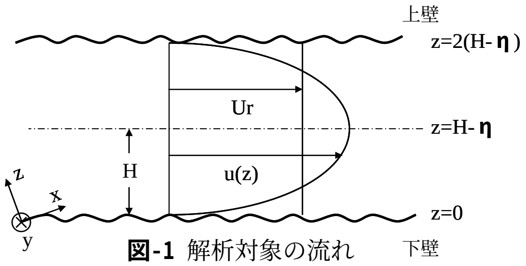

図-1 解析対象の流れ

1.はじめに：河床形状と河床に働くせん断応力の間には位相ずれが存在し，この位相ずれが河床形状の発達・移動・変形に重要な役割を果たす[1),2)]．本研究では乱流時の河床波の水理学的粗滑や河床形状特性の違いによる位相ずれへの影響を理論的に解明することを目的とし，Reynolds[3)]の方法により座標系に境界層座標を用いこれを解析した．

2.対象領域と境界層座標系：流体を乱流状態にある非圧縮性粘性流体として扱う．解析対象とする領域は上下に二つの波状壁面に挟まれており，その二つの波状壁面の間を**図-1** のように流体が y 軸方向に変化の無い 2 次元流 $(\partial/\partial y=0)$ として流れていると仮定する．座標系には，x 軸は波状の壁面の接線方向に向き，z 軸は波上壁面に対し法線方向を向き，y 軸は紙面に対し垂直な方向に向いた境界層座標系を採用する．これは壁面近傍での解析結果がデカルト座標系に比してより適切に表現できるためである[4),6)]．H は水路の半幅，Ur は断面平均流速，$u(z)$ は上下二つの壁面を平坦とした場合の z 方向の時間平均化された流速分布である．壁面波の波形には式(3)と置く．

3.波状境界による水流への影響成分に関する方程式の導出

3.1.Reynolds の方法：境界層座標系における連続式と Navier-Stokes 方程式の 2 式を密度 ρ，断面平均流速 Ur，半幅 H により無次元化を行い，以下この無次元化された変数を用いる．或る従属変数（流速，圧力など）を f と表すとき，f を $f=\bar{f}+\tilde{f}+f'$ のように 3 成分に分けて扱う．ここで成分 $\bar{f}$ は壁面が平坦としたときの時間平均分布成分，成分 $\tilde{f}$ は壁面波の影響による周期的な成分であり，成分 f' は乱流による不規則変動成分である．また，ある従属関数 f の位相平均 $\langle f\rangle$ を $\langle f\rangle=\bar{f}+\tilde{f}$ で定義する．そして，3 成分に分けた Navier-Stokes 方程式を位相平均したものから時間平均したものを取り除くことにより，従属関数である流速，圧力，せん断応力に対する波状境界による影響成分に関する運動方程式がそれぞれの従属関数につき導かれる．式(1)は波状壁面による x 軸方向流速への影響成分 $\tilde{u}$ に関する方程式である．式(2)は連続式である．ここで，r_{ij} は i 面に対して垂直な平面上に働く j 方向に掛かる Reynolds 応力であり，k は波数，Re は Reynolds 数 $(=HUr/\upsilon)$，υ は動粘性係数，h_1 は第一基本量である．壁面形状が周期関数(正弦関数)であることから，$\tilde{f}$ に対して 2 次元の周期波を式(5)のように仮定する．ここで，a は壁面波の微小振幅である．

3.2.Reynolds 応力の仮定：本研究では，乱流による非線形の運動量輸送に対し Reynolds 応力を仮定し，Reynolds 応力は渦動粘性係数 ε でひずみ速度に比例するとする Newton eddy model を採用する(式(4))．また本研究における Reynolds 応力は壁面が平坦としたときの成分 $\bar{r}_{ij}$ と波状壁面の影響による周期的な成分 $\tilde{r}_{ij}$ の和として表され，両成分に対し，Reynolds 応力はひずみ速度に比例するとする．最終的に式(1),(2)に式(4),(5)を代入し，波状壁面による各方向流速への周期的影響成分の複素振幅値である $(\hat{u},\hat{w})$ に関して方程式(6)，(7)を得る．せん断応力への影響成分は式

表-1 本研究で用いる数式と式番号

$$\frac{\partial\tilde{u}}{\partial t}+\frac{\bar{u}}{h_1}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x}+\tilde{w}\frac{\partial\bar{u}}{\partial z}+\frac{\bar{u}\tilde{w}}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial z}+\frac{1}{h_1}\left\{\frac{\partial r_{11}}{\partial x}+h_1\frac{\partial r_{13}}{\partial z}+2r_{13}\frac{\partial h_1}{\partial z}\right\}=-\frac{1}{h_1}\frac{\partial\bar{p}}{\partial x}-\frac{1}{h_1}\frac{\partial\tilde{p}}{\partial x}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\left\{\frac{1}{h_1}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{h_1}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x}\right)+\frac{1}{h_1}\frac{\partial}{\partial z}\left(h_1\frac{\partial\bar{u}}{\partial z}\right)+\frac{1}{h_1}\frac{\partial}{\partial z}\left(h_1\frac{\partial\tilde{u}}{\partial z}\right)-2\frac{\partial\tilde{w}}{\partial x}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{h_1}\right)\right.$$
$$\left.+\bar{u}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial z}\right)+\tilde{u}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial z}\right)+\frac{\tilde{w}}{h_1}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial z}\right)\right\} \qquad (1)$$

$$\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x}+\frac{\partial(h_1\tilde{w})}{\partial z}=0 \qquad (2)$$

$$\eta(x,t)=a\exp[ik(X-ct)] \qquad (3)$$

$$r_{ij}=-2\varepsilon' S_{ij}=-\varepsilon'\left(\frac{\partial u_i}{h_j\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{h_i\partial x_i}\right) \qquad (4)$$

$$\tilde{f}=a\hat{f}(z)\exp[ik(x-ct)] \qquad (5)$$

$$ik\hat{u}+D\hat{w}=0 \qquad (6)$$

$$\left[(\bar{u}-c)(D^2-k^2)-D^2\bar{u}\right]\hat{w}-ik^3\bar{u}^2=-\frac{i}{k\,\mathrm{Re}}\left\{(1+E)(D^4-2k^2D^2+k^4)+2DE(D^3-k^2D)+D^2E(D^2+k^2)\right\}\hat{w}-\frac{k^2}{\mathrm{Re}}(2D^2-k^2)\bar{u}-\frac{3k^2}{\mathrm{Re}}(DED\bar{u}+ED^2\bar{u}) \qquad (7)$$

$$\hat{\tau}=\frac{1+E}{\mathrm{Re}}Du \qquad (8)$$

$$E=\frac{\varepsilon}{\upsilon}=\frac{1}{2}\left\{1+B\frac{\kappa^2\mathrm{Re}^2}{9}(2z-z^2)^2(3-4z+2z^2)^2\left(1-\exp\left(-\frac{\mathrm{Re}\sqrt{B}}{A^+}z\right)\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2} \qquad (9)$$

$$B=-\frac{d\bar{p}}{dx}=-\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{d}{dz}\left\{(1+E)\frac{d\bar{u}}{dz}\right\} \qquad (10)$$

$$\int_0^1\bar{u}\,dz=1 \qquad (11)$$

$$\bar{u}=\mathrm{Re}\,B\int_0^z\frac{1-\eta}{1+E}d\eta \qquad (12)$$

$$\frac{\bar{u}(z)}{u_*}=\frac{1}{\kappa}In\frac{z}{k_s}+A\left(\frac{U_*k_s}{\nu}\right) \qquad (13)$$

$$A\left(\frac{U_*k_s}{\nu}\right)=8.5-5.57\log_{10}\left(1+\frac{18.7}{4\sqrt{2}}\frac{\nu}{U_*k_s}\right) \qquad (14)$$

$$\frac{U_*k_s}{\nu}=\frac{\mathrm{Re}\sqrt{f}}{H/k_s} \qquad (15)$$

$$\frac{1}{\sqrt{f}}=1.74-2.0\log_{10}\left(\frac{k_s}{H}+\frac{18.7}{\mathrm{Re}\sqrt{f}}\right) \qquad (16)$$

$$z=0\ :\tilde{w}=0,\qquad z=0\ :D\tilde{w}=0 \qquad (17)$$

$$z=1-\eta\ :D\tilde{w}=0,\qquad z=1-\eta\ :D^3\tilde{w}=0 \qquad (18)$$

キーワード：乱流　河床波　せん断応力　Reynolds 応力
連　絡　先：〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27 中央大学理工学部 TEL03(3817)1807,FAX03(3817)1803

(8)から定まる. 結果, 壁面波によるせん断応力への影響成分の絶対値$\left|\hat{\tau}\right|$と位相差θが求まる.

4.平均流速分布と渦動粘性係数の決定

4.1.滑面：水理学的滑面では, 渦動粘性係数の z 方向分布には式(9)を用いた(**図-2**). この方法の利点は渦動粘性係数の z 方向分布関数が連続な関数であることであり, 本研究の様な境界値問題の取り扱いにおいて実験結果とよくあう[3]. 平均流速 z 方向分布は, 式(10)を二つの境界条件である壁面上で$\bar{u}(z)=0$, 中心で$du/dz=0$により解き得られた式(12)により決定される. ここで, 圧力勾配であるＢは中心軸を法線とする断面で流速を積分することにより得られる式(11)の関係を条件に定める. この方法ではEと$\bar{u}$は互いに陰な形で組み込まれており, 与えられた圧力勾配に対し繰り返し計算によりE, $\bar{u}$が求まる.

4.2.粗面：粗度を考慮するため, 粗面における対数分布則式(13)[7]から粗度と平均流速分布の関係を定める. ここでU_*は摩擦速度である. 定数項Aは粗度レイノルズ数$u_* ks/\upsilon$の関数であり(式(14)), その粗度レイノルズ数は摩擦損失係数f、レイノルズ数Re、無次元相対粗度ksの関数である(式(15)). 摩擦損失係数 については Colebrook の式である式(16)[7]で与える.

5.境界条件：境界条件を与える箇所は波状壁面上と上下二つの波状壁面から等距離にある平面上の二つの部分 i), ii)である. i)波状壁面上: 本研究では流体を非圧縮性の粘性流体として扱い, non-slip 条件を波状壁面上で与える. つまり, 波状壁面に対し接線方向の速度 を 0 とし, 波状壁面に対して垂直方向の速度 も 0 とする(式(17)). ii)上下二つの波状壁面から等距離にある平面上: この平面を中心として水路は線対称な形状をしていることから式(18)が成り立つとする.

6.解析結果：

図-3, **図-4** は波状壁面(正弦関数形状)上での壁面せん断応力の上流側への位相ずれθの無次元波数α^+ $(=\alpha\upsilon/U_*)$分布であり, 過去の測定結果と本研究による解析結果を比較した図である. **図-3** から, Re 数の上昇に応じ, ピーク値は上昇し, ピーク位置は低波数側にずれる解析結果を示した, 全体としての分布形は測定結果と一致していると言える. **図-4** では, 解析結果においても壁面波長が長すぎても短すぎても底面せん断応力の壁面波形に対する上流側へのずれは生じず, また粗面上の流れにおいては, 位相のずれが小さく, 位相差にピークを与えるような特定の波数は存在しないということ示しており, これは測定結果と一致している. また, 山田ら[5]は流砂の連続式から小規模河床波の発生・発達を支配する基本式を導いているが, その式では河床波の発生の条件は拡散係数が負の値となること(河床の不安定)であり, 上流側への位相ずれが大きいほど, 拡散係数はより負となる. 解析結果は滑面より粗面では上流側への位相差が生じないことを示しており, 壁面波(河川でいう河床波)の発生には滑面である必要があることが本研究から理論的に説明できたといえる.

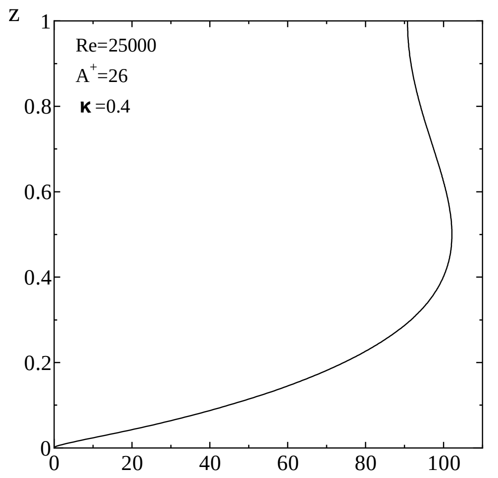

図-2 滑面における渦動粘性係数Ｅの z 方向分布
$(E=\varepsilon/\upsilon)$

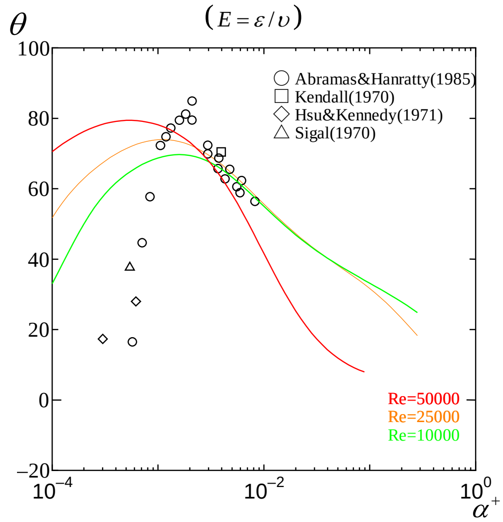

図-3 滑面における位相差のα^+方向分布

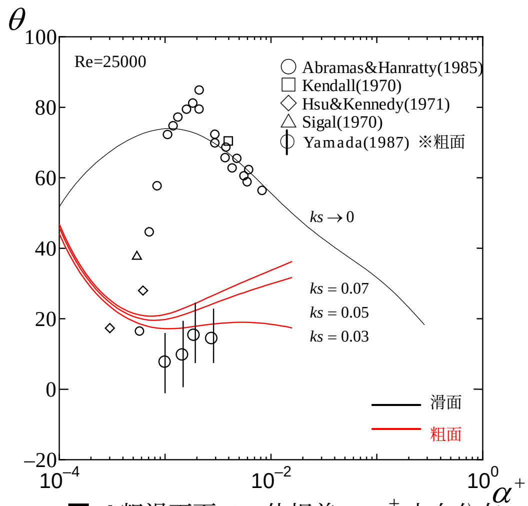

図-4 粗滑両面での位相差のα^+方向分布
(ksは半幅Hで無次元化された相対粗度)

参考文献：1)Kennedy,J.F.:The mechanics of dune and antidunes in erodible-bed channels,Fluid Mech.,Vol.16,pp.521～544,1963. 2)Hayashi,T.:Formation of dunes and antidunes in open channels,Proc.ASCE,Vol.96,Bo.HY2,pp.357 ～366,1970. 3) Reynolds,W.C. and Hussain,A.K.M.F. :The mechanics of an organized wave in turbulent shear flow. Part3. Theoritical models and comparizons with experiments, J.Fluid Mech.,vol. 54,part 2,pp.263-288,1972. 4) Benjamine,T.B. :Shearing flow over a wavy boundary, J.Fluid Mech.,vol.6,pp.161-205,1959. 5) 山田正,竹本典道:空気流によるサンドリップルの発生発達に関する研究,第 32 回水理講演会論文集,pp.479-484,1988 6) 山田正,竹本典道,大前智敬:河床波上の流れの底面せん断応力に関する理論的研究,第 33 回水理講演会論文集,pp.421-426,1989. 7)日野幹雄：明解水理学,丸善,1983.