

CIVA-格子ボルツマン法による浅水長波流れ解析

中央大学大学院 学生員 ○石川 裕士
中央大学大学院 学生員 立石 絢也
中央大学 正会員 櫻山 和男

1. はじめに

日本列島は、四方が海で囲まれ、地形が急峻なため津波や洪水といった水害に見舞われることが多い。これらの水害により毎年甚大な被害がでており、防災のために高精度に再現可能な数値解析手法の構築は工学上重要である。このような浅水長波流れ解析手法としては、有限差分法や有限要素法などが主流であるが、近年新しい数値解析手法として格子ボルツマン法 (LBM: Lattice Boltzmann Method)^{1) 2)} が注目されている。LBM は、アルゴリズムが簡便であり、計算が高速であるという特徴をもつため、大規模計算に対して有効な手法であるといえる。しかしながら、LBM では構造格子を用いることが一般的であるため、自然地形を取り扱うことが多い浅水長波流れ解析においては、その適用性に難点がある。

そこで本論文は、三角形の非構造格子を用いた高精度浅水長波流れ解析を行うことを目的とし、CIP 法に基づく移流方程式の解法である CIVA 法³⁾を導入した CIVA-LBM を提案するものである。数値解析例として、段波問題及び東京湾潮流解析を取りあげ、本解析手法の解析精度の観点から検討を行った。

2. 格子ボルツマン法

(1) 格子ボルツマン方程式

格子ボルツマン法において、衝突演算項に格子 BGK モデル¹⁾を用いた浅水長波方程式に対する格子ボルツマン方程式は以下ようになる²⁾。

$$f_{\alpha}(\mathbf{x} + \mathbf{e}_{\alpha}\Delta t, t + \Delta t) - f_{\alpha}(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{\tau} \left[f_{\alpha}(\mathbf{x}, t) - f_{\alpha}^{eq}(\mathbf{x}, t) \right] + \frac{\Delta t}{6e^2} e_{\alpha i} F_i \quad (1)$$

上式において、左辺は粒子の並進過程、右辺の 1 項目は衝突過程、2 項目は外力項をそれぞれ示している。 f_{α} は粒子分布関数、 $\mathbf{e}_{\alpha}$ は粒子の並進速度ベクトル、 f_{α}^{eq} は平衡分布関数、 F_i は外力項である。また、 e は $e = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ で定義され、 Δt は微小時間増分、 Δx は格子サイズである。なお、本論文では 2 次元 9 速度モデルを用いている。また、 τ は単一時間緩和係数と呼ばれる定数であり、鉛直方向に積分された渦動粘性係数 ν_e と以下のような関係にある。

$$\tau = \frac{3\nu_e}{e^2\Delta t} + \frac{1}{2} \quad (2)$$

(2) 局所平衡分布関数

局所平衡分布関数 f_{α}^{eq} とは、格子点上において流体が平衡状態に達したときの粒子分布であり、巨視的変数である

全水深及び速度を用いて以下のように求められる²⁾。

$$f_{\alpha}^{eq} = \begin{cases} h - \frac{5gh^2}{6e^2} - \frac{2h}{3e^2} u_i u_i & \alpha = 1 \\ \frac{gh^2}{6e^2} + \frac{h}{3e^2} e_{\alpha i} u_i + \frac{h}{2e^4} e_{\alpha i} e_{\alpha j} u_i u_j - \frac{h}{6e^2} u_i u_i & \alpha = 2 \sim 5 \\ \frac{gh^2}{24e^2} + \frac{h}{12e^2} e_{\alpha i} u_i + \frac{h}{8e^4} e_{\alpha i} e_{\alpha j} u_i u_j - \frac{h}{24e^2} u_i u_i & \alpha = 6 \sim 9 \end{cases} \quad (3)$$

なお、上式の係数は、巨視的速度においてべき級数を取り、質量保存、運動量保存、エネルギー保存を満たすように決定されている。

(3) 流れの巨視的変数

流体の巨視的変数である全水深及び速度は、以下のように計算される。

$$h = \sum_{\alpha} f_{\alpha}, \quad \mathbf{u} = \frac{1}{h} \sum_{\alpha} \mathbf{e}_{\alpha} f_{\alpha} \quad (4)$$

(4) CIVA 法

CIVA 法³⁾は、移流方程式の高精度かつ安定な解法である CIP 法を三角形要素に拡張した手法である。CIP 法や CIVA 法では、各節点の局所厳密解を上流側の格子内に張った 3 次の補間曲面により求める。(図-1)

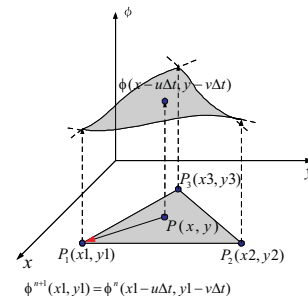


図-1 CIVA 法

3. 数値解析例

(1) 段波問題

図-2 に解析モデル及び初期水位を示す。この数値解析例は、静止していたダム内の流体が突然崩壊、放流する現象である。境界条件としては、固定壁面を用い slip 条件とする。なお、 ν_e は $0.03[\text{m}^2/\text{sec}]$ とした。

構造格子と非構造格子が同程度の節点数・要素数を有する場合に、構造格子を用いた従来の LBM と非構造格子を用いた本手法である CIVA-LBM の精度比較を行う。なお、それぞれのメッシュの形状を図-3 に示す。

解析結果として、図-4 に 1 秒後におけるメッシュ及び手法の違いによる挙動の比較を示す。図より、本手法は非

KeyWords: 格子ボルツマン法, 浅水長波流れ, CIVA 法

連絡先: 〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27 E-mail: yuji@civil.chuo-u.ac.jp

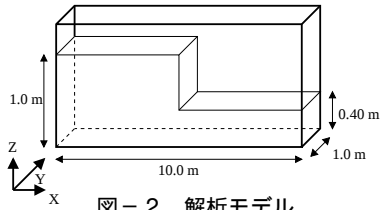
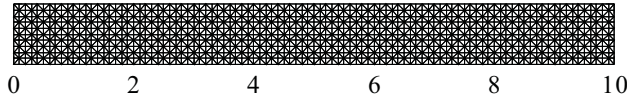
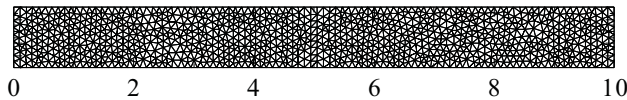


図-2 解析モデル

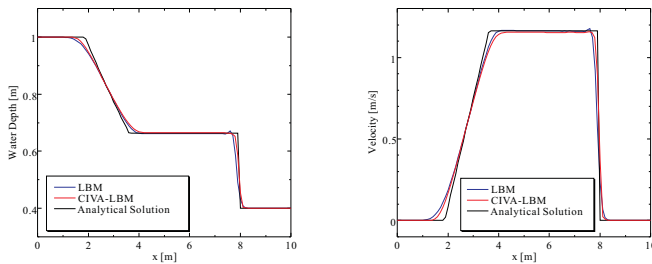


(a) LBM メッシュ



(b) CIVA-LBM メッシュ

図-3 メッシュ形状



(a) 水深図

(b) 流速図

図-4 1秒後における挙動

構造格子の解析が可能であること及び、従来の LBM と同程度の解析精度を得ることを示せた。

(2) 東京湾潮流解析

実際の潮流現象の解析として、閉鎖性の高い東京湾を取りあげた。メッシュ図は図-5 に示すとおりであり、節点数は 5849、要素数は 10370 である。境界条件としては、壁面は non-slip 条件とし、開境界には M_2 分潮として以下のような入射条件を与えた。

$$\zeta = A \sin \frac{2\pi}{T} t, \quad u_i = \sqrt{\frac{g}{h}} \zeta n_i^+ \quad (5)$$

上式において、振幅 A は 0.21[m]、周期 T は 12.42[h] とする。また、渦動粘性係数 ν_e は 10[m²/sec] と仮定する。

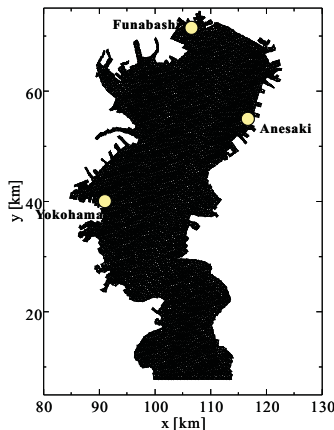
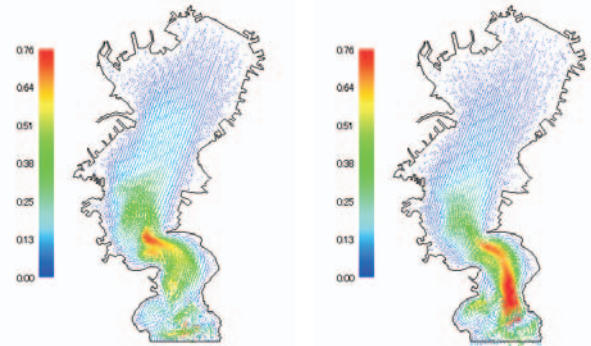


図-5 メッシュ図

解析結果として、図-6 に上げ潮時と下げ潮時における流

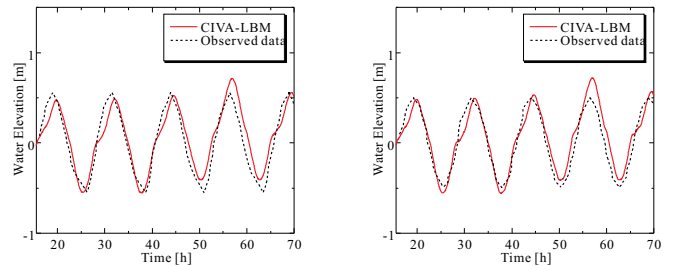
速ベクトル図を示す。図より、本手法は東京湾のように複雑な境界形状を有する場合においても、解析可能であることを示せた。また図-7 に、姉崎と船橋における水位時刻歴を示す。図より、1 周期目の波は初期条件の影響を受けるためそれ以降について実測値と比較すると、定性的に妥当な解析結果を得られていることがわかる。



(a) 上げ潮時

(b) 下げ潮時

図-6 流速ベクトル図



(a) 姉崎

(b) 船橋

図-7 各地点における水位時刻歴

4. おわりに

本論文では、三角形の非構造格子を用いた高精度浅水長波流れ解析を行うことを目的とし、CIP 法に基づく移流方程式の解法である CIVA 法を導入した CIVA-LBM を提案した。数値解析例として、段波問題及び東京湾潮流解析を取りあげ、以下の結論を得た。

- 段波問題において、本手法の解析結果は通常の LBM と同程度の節点数を有するとき、同程度の解析精度を得ることが示せた。
- 東京湾潮流解析において、本手法は複雑な境界形状を有する問題においても、適用可能であることを示された。

今後の課題としては、境界形状が複雑になる際の境界条件の検討、メッシュの任意性を活かしたより複雑な解析領域に対する適用などが挙げられる。

参考文献

- 1) 稲室隆二:格子ボルツマン法, 物性研究, **77-2**, 197-232, 2001.
- 2) J.G.Zhou: Lattice Boltzmann Methods for Shallow Water Flows, Springer, 2003.
- 3) 田中伸厚: 数値流体力学のための高精度メッシュフリー手法の開発, 機論, **64-620B**, 1071-1078, 1998.