

VOF / FEM 法による透過性構造物周辺の自由表面流れ解析

中央大学 学生員 四谷 宣之
 中央大学大学院 学生員 加藤 和範
 中央大学 正会員 櫻山 和男

1. はじめに

近年、環境問題に対する関心が高まり、河川・海岸構造物においても従来多く用いられてきた不透水性構造物に代わって、自然環境によい透過性構造物が注目されてきている。しかし、透過性構造物を設計する際、問題点として構造物の崩壊などが考えられる。そのため、構造物周辺の流況を正確に把握することは工学上重要である。

そこで、本研究では構造物周辺の流れを解析するために、複雑な自由表面流れに対応可能とされている VOF 法を用いて、透過性構造物周辺の流況解析モデルを構築することを目的としている。なお、自由表面位置を決定する移流方程式の解法としては、CIVA 法¹⁾・SUPG 法の二通りの手法を用いて比較を行う。数値解析例には、透過性構造物を扱う前段階として、不透水性構造物越流流れ問題を取り上げ、本手法の有効性を検討する。

2. 解析手法

(1) 基礎方程式

本研究における基礎方程式は、榊山ら²⁾により提案されたポーラスモデルに基づき、以下に示す非圧縮粘性流体の Navier-Stokes 運動方程式 (1)、連続式 (2) を用いる。

$$\rho \left(\lambda_v \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \lambda \mathbf{u} - \gamma \mathbf{f} - \mathbf{R} \right) - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = 0 \text{ in } \Omega \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \gamma \mathbf{u} = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (2)$$

ここで各記号について、 Ω は解析領域、 \mathbf{u} は流速、 ρ は密度、 \mathbf{f} は物体力、 \mathbf{R} は水平、鉛直方向の多孔質体からの抵抗力、 γ_v は空隙率、 γ は水平、鉛直方向面積透過率、各 λ は C_M を慣性力係数とし、 $\lambda_v = \gamma_v + (1 - \gamma_v)C_M$ 、 $\lambda_x = \gamma_x + (1 - \gamma_x)C_M$ 、 $\lambda_z = \gamma_z + (1 - \gamma_z)C_M$ で表される。また、式 (1) における応力テンソル $\boldsymbol{\sigma}$ は以下の式 (3) で表される。

$$\boldsymbol{\sigma} = -\gamma_v p \mathbf{I} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \quad (3)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} (\nabla \gamma_x \mathbf{u} + (\nabla \gamma_z \mathbf{u})^T) \quad (4)$$

ここで、 p は圧力、 μ は粘性係数である。また、式 (1) における \mathbf{R} はポーラスモデルにおける多孔質抵抗項²⁾であり、以下の式 (5) で表される。

$$\mathbf{R} = \frac{1}{2} \frac{C_d}{\delta x} (1 - \gamma) \mathbf{u} \sqrt{|\mathbf{u}|^2} \quad (5)$$

ここで、 δx は水平・鉛直方向要素分割幅であり、 C_d は抵抗係数である。

(2) 安定化有限要素方程式による定式化

基礎方程式 (1)、(2) に対して SUPG/PSPG 法に基づく安定化有限要素法を適用すると、以下の弱形式 (6) が得られる。

$$\int_{\Omega} \mathbf{w} \cdot \rho \left(\lambda_v \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \lambda \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \gamma \mathbf{f} - \mathbf{R} \right) d\Omega + \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}) : \boldsymbol{\sigma} d\Omega + \int_{\Omega} q \gamma \nabla \cdot \mathbf{u} d\Omega + \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Omega_e} \left\{ \tau_{supg} \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{w} + \tau_{pspg} \frac{1}{\rho} \nabla q \right\} \cdot \left\{ \rho \left(\lambda_v \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \lambda \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \gamma \mathbf{f} - \mathbf{R} \right) - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \right\} d\Omega + \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Omega_e} \tau_{cont} \nabla \cdot \mathbf{w} \rho \nabla \cdot \mathbf{u} d\Omega = \int_{\Gamma} \mathbf{w} \cdot \mathbf{h} d\Gamma \quad (6)$$

ここで、式 (6) における \mathbf{w} は流速の重み関数、 q は圧力の重み関数である。また、 τ_{supg} 、 τ_{pspg} 、 τ_{cont} は安定化パラメータであり式 (7)、(8)、(9) により定義される。

$$\tau_{supg} = \left[\left(\frac{2}{\Delta t} \right)^2 + \left(\frac{2\|\mathbf{u}\|}{h_e} \right)^2 + \left(\frac{4\nu}{h_e^2} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (7)$$

$$\tau_{pspg} = \tau_{supg} \quad (8)$$

$$\tau_{cont} = \frac{h_e}{2} \|\mathbf{u}\| \xi(Re_u) \quad (9)$$

$$Re_u = \frac{\|\mathbf{u}\| h_e}{2\nu} \quad (10)$$

$$\xi(Re_u) = \begin{cases} \left(\frac{Re_u}{3} \right) & (Re_u \leq 3) \\ 1 & (Re_u > 3) \end{cases} \quad (11)$$

ここで、 h_e は要素サイズ、 ν は動粘性係数、 Re_u は要素レイノルズ数である。式 (6) に対して、P1/P1(流速・圧力1次)要素を用いて補間を行うと以下に示す有限要素方程式 (12)、(13) が得られる。

$$(\mathbf{M} + \mathbf{M}_{\delta}) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{K}(\mathbf{u}^*) + \mathbf{K}_{\delta}(\mathbf{u}^*)) \mathbf{u} - (\mathbf{C} - \mathbf{C}_{\delta}) p + \mathbf{S} \mathbf{u} - (\mathbf{N} + \mathbf{N}_{\delta}) \mathbf{f} = 0 \quad (12)$$

$$\mathbf{C}^T \mathbf{u} + \mathbf{M}_{\varepsilon} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{K}_{\varepsilon}(\mathbf{u}^*) \mathbf{u} - \mathbf{N}_{\varepsilon} \mathbf{f} + \mathbf{C}_{\varepsilon} p = 0 \quad (13)$$

ここで、 \mathbf{M} 、 \mathbf{K} 、 \mathbf{C} 、 \mathbf{S} 、 \mathbf{N} は係数行列であり、添字 δ 、 ε は、それぞれ SUPG 項、PSPG 項に起因するものを表す。また、 \mathbf{u}^* は移流速度であり、2次精度 Adams-Bashforth 法を用いる。

時間方向の離散化には Crank-Nikolson 法を適用し、連続式は陰的に取り扱う。また、連立一次方程式の解法には Element by Element に基づく Bi-CGSTAB 法を用いる。

KeyWords : VOF 法, CIVA 法, 透過性構造物, 堰

連絡先 : 〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27 E-mail: d32319@educ.kc.chuo-u.ac.jp

(3) 自由表面位置の計算

自由表面位置を決定する界面関数 (VOF 関数) は、以下の式 (14) に示す移流方程式により支配される。

$$\gamma_v \frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \gamma \phi = 0 \quad (14)$$

ここで、 ϕ は VOF 関数を表し、液相領域の節点では $\phi=1$ 、気相領域の節点では $\phi=0$ 、自由表面上の節点では $\phi=0.5$ となる。また、各節点における気体、液体の密度及び粘性係数は、計算された VOF 関数を用いることにより以下の式 (15)、(16) より決定される。

$$\rho = \rho_{Liq}\phi + \rho_{Gas}(1 - \phi) \quad (15)$$

$$\mu = \mu_{Liq}\phi + \mu_{Gas}(1 - \phi) \quad (16)$$

ここで、 ρ_{Liq} は液体の密度、 ρ_{Gas} は気体の密度、 μ_{Liq} は液体の粘性係数、 μ_{Gas} は気体の粘性係数である。

界面位置を決定するための移流方程式 (14) の解法には、CIVA 法¹⁾・SUPG 法の二通りの手法を用いる。

a) CIVA 法

CIVA 法とは、移流方程式の高精度解法である CIP 法を三角形要素に対して適用可能となるように拡張した方法である。計算方法は、移流方程式の厳密解である式 (17) を用いて、 $\phi^{n+1}(\mathbf{x}, t)$ の解を求めるために、 $t - \Delta t$ の値である $\phi^n(\mathbf{x} - \mathbf{u}\Delta t, t - \Delta t)$ を用いる。なお、上流点 $\mathbf{x} - \mathbf{u}\Delta t$ に位置する ϕ^n の値は、上流側の要素内で補間することにより求める。

$$\phi^{n+1}(\mathbf{x}, t) = \phi^n(\mathbf{x} - \mathbf{u}\Delta t, t - \Delta t) \quad (17)$$

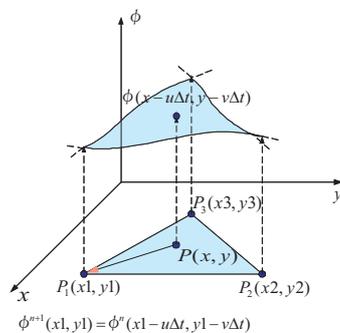


図-1 上流点の評価方法

b) SUPG 法

SUPG 法とは、移流項の卓越を抑制する安定化項を付加したものであり、弱形式 (18) は以下の形で表される。

$$\int_{\Omega} \mathbf{w} \left(\gamma_v \frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \gamma \phi \right) d\Omega + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_e} \tau_{supg} \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{w} \cdot \left(\gamma_v \frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \gamma \phi \right) d\Omega = 0 \quad (18)$$

3. 数値解析例

(1) 解析モデル及び解析条件

本手法の有効性を検討するため、不透水性構造物越流流れ問題³⁾を取り上げる。図-2 に解析モデルを示す。斜線部分に、障害物として不透水性構造物を設ける。初期条件と

して構造物上流側に水を満たし、解析領域全体の流速 u, v を 0 とする。流入条件としては、計算開始 20 秒後に設定流量の 29.87[l] となるように直線的に流量を増加させ、その後は一定流量を与える。流出条件としては、下流端で自由流出とする。また、側面を slip 条件とし、台形型構造物左右斜面を non-slip 条件とする。以上の条件により、流況解析を行い、水面形と図-2A, B, C, D 断面における流速分布形を実験値と比較し、本手法の有効性を検討する。

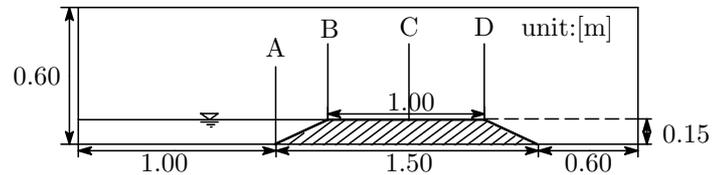


図-2 解析モデル

(2) 解析結果

不透水性構造物越流後の水面形を図-3 に示す。これより、本手法における解析結果は、実験値と同様の結果を得た。また、移流方程式の解法による解析結果の違いについて、SUPG 法は実験値と良い一致を示したが、CIVA 法の水面形は構造物上部において体積が増加したため、実験値の水位を上回る結果となってしまった。実験値とのより詳細な比較については講演時に示す。

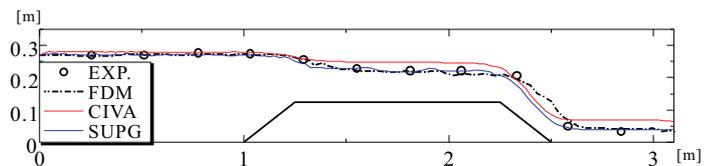


図-3 水面形の実験値と解析値の比較 (不透水性構造物)

4. おわりに

本研究では、構造物周辺の流れを解析するため、複雑な自由表面流れに VOF 法を用いて、透過性構造物周辺の流況解析モデルを構築することを目的とし、その前段階として不透水性構造物越流流れ解析を行った。その結果、以下の結論を得た。

- 複雑な自由表面を有する構造物周辺の流況を安定に解析できた。
- 数値解析例より、SUPG 法による水面形は、実験値と良い一致を示している。一方、CIVA 法による水面形は体積の点で課題が残された。

今後の課題として、本手法の透過性構造物周辺の流況解析への適用が挙げられる。なお、透過性構造物周辺の流況解析については講演時に示す予定である。

参考文献

- 1) 田中伸厚:数値流体力学のための高精度メッシュフリー手法の開発, 日本機械学会論文集 (B 編), 64 巻 620 号, pp.1071-1078, 1998.
- 2) 神山勉, 鹿島遼一:ポラスボディモデルによる透過性防波堤執念の波動解析手法の開発, 電力中央研究所報告, U91048, 1992.
- 3) 前野志朗, 道奥康治, 森永智, 菊池慶大:捨石堰周辺の流況解析, 水工学論文集, 第 48 巻, pp.829-834, 2004.