安定化有限要素法による浅水長波流れ解析における高精度化

中央大学 学生員 ○川合 伸宜
中央大学大学院 学生員 唐木田 泰久
中央大学大学院 学生員 小林 義典
中央大学 正会員 樫山 和男

1. はじめに

海岸，河川，湖沼などの水環境流れは，浅水長波方程式により記述される．また，複雑な自然地形を対象とすることが多いため，数値解析を行う際には，任意形状への適合性に優れた有限要素法は有効であるといえる．既往の研究において，安定化有限要素法を浅水長波方程式に適用した場合，計算結果は衝撃捕捉項の安定化パラメータ[1) 2)]の影響を受けることが知られている．

そこで，本論文は浅水長波流れ解析の高精度化を目的とし，衝撃捕捉項のパラメータの検討するものである．本論文で提案する安定化パラメータは，Tezduyar らが圧縮性流れ解析に提案したものを基本として，浅水長波流れ解析に適応させたものである．数値解析例として，段波問題およびダムブレイク問題を取り上げ，本論文で提案する安定化パラメータの有効性および汎用性の検討を行った．

2. 数値解析手法

(1) 支配方程式

支配方程式には，以下に示す浅水長波方程式を用いる．

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t}+\mathbf{A}_i\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{x}_i}+\mathbf{R}=0 \tag{1}$$

$$\mathbf{U}=\left[\begin{array}{c} h \\ uh \\ vh \end{array}\right] \qquad \mathbf{R}=\left[\begin{array}{c} 0 \\ c^2\frac{\partial z}{\partial x} \\ c^2\frac{\partial z}{\partial y} \end{array}\right]$$

$$\mathbf{A}_1=\left[\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ c^2-u^2 & 2u & 0 \\ -uv & v & u \end{array}\right] \quad \mathbf{A}_2=\left[\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \\ -uv & v & u \\ c^2-v^2 & 0 & 2v \end{array}\right]$$

ここに，h，u，v，z，$c(=\sqrt{gh})$，g はそれぞれ全水深，x，y 方向断面平均流速，標高，波速，重力加速度である．

(2) 重み付き残差方程式

支配方程式 **(1)** に，空間方向の離散化として SUPG 法に基づく安定化有限要素法を適用すると，以下の重み付き残差方程式が得られる．

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \mathbf{W}\cdot\Big(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t}+\mathbf{A}_i\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{x}_i}+\mathbf{R}\Big)d\Omega \\ &+\sum_{e=1}^{nel}\int_{\Omega_e}\tau\Big(\mathbf{A}_j^T\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \mathbf{x}_j}\Big)\cdot\Big(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t}+\mathbf{A}_i\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{x}_i}+\mathbf{R}\Big)d\Omega \\ &+\sum_{e=1}^{nel}\int_{\Omega_e}\delta\Big(\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \mathbf{x}_i}\Big)\cdot\Big(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{x}_i}\Big)d\Omega=0\end{aligned} \tag{2}$$

式 **(2)** の左辺第 1 項は Galerkin 項であり，第 2，3 項の要素ごとの積分の総和項はそれぞれ SUPG 項，衝撃捕捉項である．

なお，$\mathbf{W}$ は重み関数である．また，τ および δ は安定化パラメータ[1) 2)]である．時間方向の離散化として Crank-Nicolson 法を用いた．また，連立一次方程式の解法には，Element-by-Element Bi-CGSTAB 法を適用する．

(3) 安定化パラメータ

衝撃捕捉項は不連続面における数値振動を制御するものであり，式 **(2)** の δ は以下のように定義する．Case1 は従来より用いられているものであり，Case2，Case3 が本論文で提案するものである．

Case1

$$\delta=\frac{h_e}{2}\|\mathbf{u}\| \tag{3}$$

ここに，h_e は要素サイズである．

Case2

$$\delta=\tau_{shoc}\left(||\mathbf{u}_{int}||\right)^2 \tag{4}$$

$$\tau_{shoc}=\frac{\nu_{shoc}}{2||\mathbf{u}_{cha}||}\left(\frac{|\nabla^2 H|}{|\nabla^2 H|_{max}}\right) \tag{5}$$

$$\frac{\nu_{shoc}}{2||\mathbf{u}_{cha}||}=\left(\sum_{a=1}^{n_{en}}(c|\mathbf{j}\cdot\nabla N_a|+|\mathbf{u}\cdot\nabla N_a|)\right)^{-1} \tag{6}$$

$$H=h+z \tag{7}$$

$$||\mathbf{u}_{int}||=\sqrt{||\mathbf{u}||^2+c^2} \tag{8}$$

$$\mathbf{j}=\frac{\nabla h}{\|\nabla h\|} \tag{9}$$

ここに，N_a は形状関数である．

Case3

Case3 は Case2 の式 **(5)** に以下のように水深に関する無次元の項を考慮に加えたものである．

$$\tau_{shoc}=\frac{\nu_{shoc}}{2||\mathbf{u}_{cha}||}\left(\frac{|\nabla^2 H|}{|\nabla^2 H|_{max}}\right)\left(\frac{h_{max}-h_{min}}{h^e}\right) \tag{10}$$

ここに，h^e は各要素の平均水深である．なお，h_{max}，h_{min} はそれぞれ解析領域における水深の最大値，最小値である．また，SUPG 法は移流項の卓越による数値不安定性を制御するものであり，式 **(2)** の τ は以下のように定義する．なお，τ は各ケース統一とする．

$$\tau=\left(\frac{1}{(\tau_{sugn1})^2}+\frac{1}{(\tau_{sugn2})^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \tag{11}$$

$$\tau_{sugn1}=\left(\sum_{a=1}^{n_{en}}(c\mid\mathbf{j}\cdot\nabla N_a\mid+\mid\mathbf{u}\cdot\nabla N_a\mid)\right)^{-1} \tag{12}$$

$$\tau_{sugn2}=\frac{\Delta t}{2} \tag{13}$$

ここに，Δt は微小時間増分量である．

KeyWords： 安定化有限要素法，浅水長波流れ，衝撃捕捉項，安定化パラメータ
連絡先： 〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27 E-mail: d32124@educ.kc.chuo-u.ac.jp

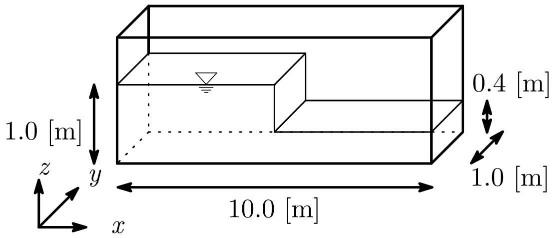
(4) 移動境界手法

本論文では，移動境界手法として Euler 的手法を用いる．Euler 的手法とは，あらかじめ解析領域を有限要素分割しておき，毎時間ステップにおいて各要素が陸域か水域かを判定する方法である．水際線の移動は陸水判定に用いられる微小水深に依存する．この微小水深の値を適切に設定する事により，水際線を精度良く表現可能である．

3. 数値解析例

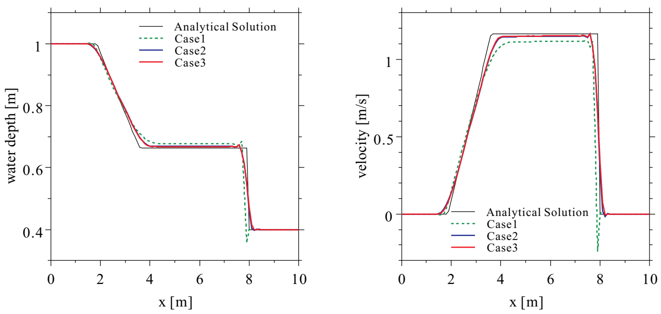
(1) 段波問題

本論文で提案する安定化パラメータの有効性を検討するため，段波問題を取り上げる．解析モデルを**図-1** に示す．有限要素分割は三角形要素を使用し，総節点数 303，総要素数 400，x 方向分割幅 0.1[m]，y 方向分割幅 0.5[m] である．境界条件として，壁面において slip 条件を与えた．また，微小時間増分量は 0.01[sec] とし，解析を行った．



図－1 解析モデル

1 秒後の計算結果を**図-2** に示す．従来の安定化パラメータ Case1[1] は先端部において数値振動が発生し，特に流速分布において顕著になっていることがわかる．一方，本論文で提案する安定化パラメータ Case2，Case3 の計算結果は水面形状，流速分布ともに同部分における数値振動が低減され，理論解と良い一致を示していることがわかる．これは Case2，Case3 は Case1 と比べ，水位の二階微分を考慮することにより，不連続面にのみ局所的に重みを付けて，安定化を施している効果である．

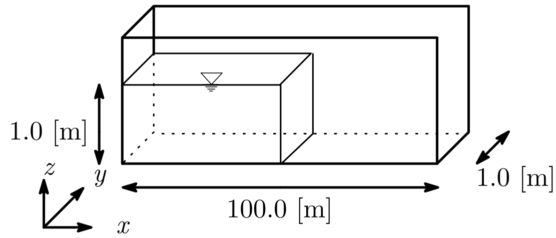


水面形状　　流速分布

図－2 1 秒後の計算結果

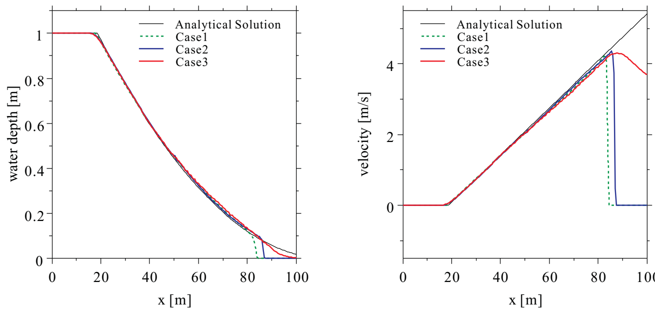
(2) ダムブレイク問題

本論文で提案する安定化パラメータの移動境界問題への有効性を検討するため，ダムブレイク問題を取り上げる．解析モデルを**図-3** に示す．有限要素分割は三角形要素を使用し，総節点数 603，総要素数 800，x 方向分割幅 0.5[m]，y 方向分割幅 0.5[m] である．境界条件として，壁面において slip 条件を与えた．また，微小時間増分量は 0.01[sec] とし，微小水深は各ケース，最小な値を設定し，解析を行った．



図－3 解析モデル

10 秒後の計算結果を**図-4** に示す．本論文で提案する安定化パラメータ Case3 は，他の 2 ケースに比べ，微小水深の値を小さく設定できた．その結果，他の 2 ケースの計算結果は先端部において波が立つことわかるが，一方，Case3 の計算結果は水際線の移動が精度良く表現でき，最も良好な解が得られていることがわかる．



水面形状　　流速分布

図－4 10 秒後の計算結果

4. おわりに

本論文は安定化有限要素法による浅水長波流れ解析の高精度化を目的とし，衝撃捕捉項の安定化パラメータの検討を行った．数値解析例として，段波問題およびダムブレイク問題を取り上げ，計算結果と理論解との比較を行った．その結果，以下の結論を得た．

- 本論文で提案した安定化パラメータ Case2，Case3 による計算結果は，水位の二階微分を考慮することにより，不連続面における数値振動が低減され，理論解と良い一致を示し，有効性が確認された．
- 移動境界問題において，本論文で提案した安定化パラメータ Case3 による計算結果は，水際線を精度良く表現でき，理論解と良い一致を示した．

今後の課題として，実現象への適用を行う予定である．また，陽解法においての安定化パラメータの検討が挙げられる．

参考文献

1) T.E.Tezduyar, Y.Osawa : Finite element stabilization parameters computed from element matrices and vectors ,*Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **190**,pp411-430,2000.
2) T.E.Tezduyar, M.Senga : Determination of the shock-capturing parameters in SUPG formulation of compressible flows, *Computational Mechanics*,WCCM VI in conjuction with APCOM'04,Beijing,2004.