

安定化有限要素法に基づく LES 乱流モデルの精度検証

中央大学大学院 学生員 ○ 仲嶋 晋一
中央大学大学院 学生員 板橋 翔
中央大学 正会員 檜山 和男

1. はじめに

工学的な流れや、自然界の流れの多くは乱流状態にある。乱流の予測には、実験や観測が行われてきたが、近年計算機の発達に伴い、乱流の予測に対して計算機による数値解析が多く用いられるようになってきた。これまで、乱流の数値解析手法には構造格子を用いた差分法による方法が多く用いられていた。しかし、これらの手法は複雑形状への適用に限界がある。このため、複雑形状に適した精度の高い乱流の数値解析手法の必要性が高まってきている。複雑形状における数値解析には非構造格子に基づく有限要素法が、複雑な非定常解析には LES が有効であると考えられる。以上より、有限要素法に基づく LES の精度の向上を図ることは、工学的に重要なことであると考えられる。

これまでの著者らの研究¹⁾においては、有限要素分割の解像度に関する検討が十分ではなかった。そこで本論文では、安定化有限要素法に基づく LES の精度検証を格子解像度に着目して行った。LES 乱流モデルには、壁関数に Van Driest 関数を用いた Smagorinsky モデル²⁾を用いた。数値解析例には、Channel 流れ解析を取り扱い、既存の DNS データベース³⁾との比較により、計算精度の検討を行った。

2. 支配方程式

非定常・非圧縮性・粘性流体の流れは、非圧縮性 Navier-Stokes 方程式、連続式によって支配されている。これらに対してフィルター操作を施すことにより LES の支配方程式が導出される。LES の支配方程式は式 (1)、(2) で与えられる。

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - f_i = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} (-\tau_{ij} + 2\nu \bar{D}_{ij}) \quad (\text{in } \Omega) \quad (1)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (\text{in } \Omega) \quad (2)$$

ここで、 $\bar{u}_i$ は i 方向の流速の GS 成分、 f_i は i 方向の物体力、 ρ は流体の密度、 ν は流体の動粘性係数である。 P は総圧、 $\bar{D}_{ij}$ は変形速度テンソルであり、式 (3) で表される。

$$P = \bar{p} + \frac{1}{3} \overline{u'_k u'_k}, \quad \bar{D}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (3)$$

ここで、 $\bar{p}$ は圧力の GS 成分、 u'_i は i 方向の流速の SGS 成分である。式 (1) 中の τ_{ij} は SGS 応力項であり、式 (4) で与えられる。

$$\tau_{ij} = \bar{u}_i \bar{u}_j - \bar{u}_i \bar{u}_j \equiv L_{ij} + C_{ij} + R_{ij} \quad (4)$$

ここで、 L_{ij} 、 C_{ij} 、 R_{ij} はそれぞれ、Leonard 項、Cross 項、SGS Reynolds Stress 項と呼ばれている。

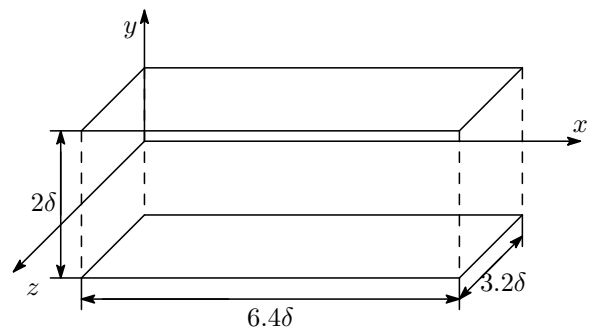


図-1 解析領域

表-1 数値解析条件

	有限要素分割数 ($x \times y \times z$)	有限要素分割幅 ($\Delta x^+, \Delta y^+, \Delta z^+$)
Mesh1	$32 \times 40 \times 32$	30, 1 ~ 14, 15
Mesh2	$64 \times 40 \times 64$	15, 1 ~ 14, 7.5
Mesh3	$32 \times 64 \times 32$	30, 0.2 ~ 9.2, 15

LES では、式 (4) 中の $\bar{u}_i \bar{u}_j$ を直接計算することができないので、何らかのモデル化を行い計算を行う。本論文では、SGS 応力項を Smagorinsky モデル²⁾によりモデル化を行った。Smagorinsky モデルにおける τ_{ij} は式 (5) で表される。

$$\tau_{ij} = -2\nu_e \bar{D}_{ij}, \quad \nu_e = (C_s f_s \Delta)^2 |\bar{D}| \quad (5)$$

ここで、 C_s は、Smagorinsky 定数である。 Δ 、 $|\bar{D}|$ はそれぞれ式 (6) で与えられる。

$$\Delta = V_e^{\frac{1}{3}}, \quad |\bar{D}| = \sqrt{2\bar{D}_{ij}\bar{D}_{ij}} \quad (6)$$

ここで、 V_e は四面体要素の体積である。

f_s は壁関数であり、本論文では Van Driest 関数を採用した。Van Driest 関数は、式 (7) で表される。

$$f_s = 1 - \exp\left(-\frac{y^+}{A^+}\right), \quad A^+ = 25, \quad y^+ = \frac{u_\tau y}{\nu} \quad (7)$$

ここで、 y^+ は壁座標、 y は壁面からの距離、 u_τ は壁面摩擦速度である。

本論文では式 (1)、(2) に対して、SUPG/PSPG 法⁴⁾に基づく安定化有限要素法を適用し、複雑形状への適合性に優れた P1/P1 要素（流速・圧力 1 次補間四面体要素）を用いて空間方向に離散化し、有限要素方程式を得た。時間方向への離散化については、移流速度に 2 次精度 Adams-Bashforth 法、移流速度以外の流速に Crank-Nicolson 法（2 次精度）を用い、圧力項、SGS 応力項、連続式は陰的に扱った。

KeyWords: 安定化有限要素法, 四面体要素, LES

連絡先: 〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27 E-mail: shinichi@civil.chuo-u.ac.jp

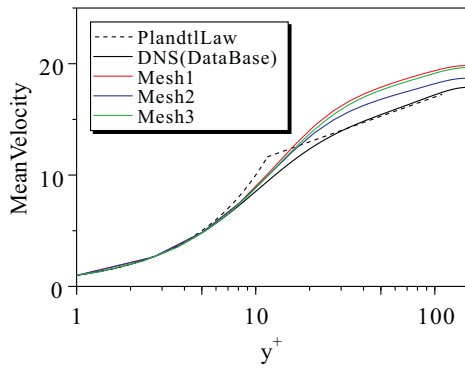


図-2 平均流速図

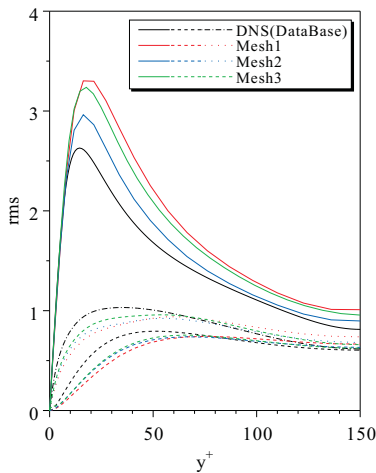


図-3 乱流強度図

3. Channel 流れ解析

(1) 数値解析条件

有限要素分割の差異が計算精度に与える影響を考察するために、数値解析例として 2δ の流路幅を有する Channel 流れ解析を取り扱った。この解析例では、すべての物理量が無次元量であるため、支配方程式を δ , u_τ , ρ で無次元化して数値解析を行った。流れを保持するために式 (1) における $f_1 = 1.0$ を外力項として与えた。解析領域を図-1に示した。有限要素分割数、有限要素分割幅を表-1に示した。境界条件は、Channel の上下面に Non-Slip 条件、それ以外の面では Periodical 条件を採用した。初期条件は、Iwamotoらの DNS データベース³⁾に乱れを付加したものを使用した。なお、初期条件を作成する際に付加した乱れの倍率は、Mesh1 は 600%，Mesh2 は 1000%，Mesh3 は 1500% とした。Reynolds 数は、式 (8) のように定義される。

$$Re_\tau = \frac{u_\tau \delta}{\nu} = 150 \quad (8)$$

微小時間増分量 $\Delta t = 5.0 \times 10^{-4}$ ，Smagorinsky 定数 $C_s = 0.10$ とした。本論文では、計算コスト削減のため、領域分割法に基づく並列計算法を採用した。通信ライブラリーには MPI を使用し、領域分割数は主流方向に 8 等分割、横方向に 2 等分割とした。連立一次方程式の解法には Element-by-Element Bi-CGSTAB2 法を用いた。

(2) 数値解析結果

図-2，3にそれぞれ無次元時間 40～80 における、平均流速図，乱流強度図を示した。

図-2では、 $y^+ < 10$ の領域では、すべてのケースにおいて DNS データベースと定量的により一致を示した。 $y^+ > 10$ の領域では、すべてのケースにおいて平均流速を過大評価した。3 ケースを比較すると、Mesh1, Mesh3 では顕著な差異は見られなかったが、これら 2 ケースに比べ Mesh2 は DNS データベースに近い結果を得た。

図-3では、主流方向の乱流強度においては、Mesh1, Mesh3 に比べ、Mesh2 が DNS データベースに値、ピークの位置ともに近い結果を得た。主流方向以外の乱流強度においては、Mesh3 が他の 2 ケースよりも DNS データベースに近い結果を得たが、顕著な差異は見られなかった。

以上より、今回取り扱った 3 ケースから流れ方向に分割を細かくしたほうが、鉛直方向に分割を細かくするよりも精度の向上に対する影響が大きいという結果が得られた。これは、鉛直方向の分割に比べ、流れ方向の分割がまだ十分ではないためであると考えられる。鉛直方向の分割については、分割の粗い Mesh1, Mesh2 においても壁面からの第 1 点目が粘性底層内にあるため、これらよりも細分割した Mesh3 においても大きな差が現れなかったと考えられる。

4. おわりに

本論文では、安定化有限要素法に基づく LES の計算精度について格子解像度に着目して検証することを目的とし、既存の DNS データベース³⁾との比較のもとで検討を行った。その結果、以下の結論を得た。

- 平均流速の比較において、流れ方向の分割数の増加による精度の向上は見られたが、鉛直方向の分割数の増加による精度の向上は見られなかった。
- 主流方向の乱流強度の比較において、流れ方向の分割数の増加による精度の向上は見られたが、主流方向以外の乱流強度の比較においては分割数の増加による精度の向上は見られなかった。
- 壁面近傍の分割数は Mesh1, Mesh3 程度で十分であると考えられる。

今後の課題として、有限要素分割が精度に与える影響をさらに考察すると共に、高 Reynolds 数での検証を行ってみたいと考えている。

参考文献

- 1) 仲嶋晋一，倉橋哲弘，樫山和男：安定化有限要素法を用いた LES 乱流モデルの検証，土木学会第 60 回年次学術講演会講演概要集 (CD-ROM)，1-342，2005。
- 2) J. Smagorinsky: General circulation experiments with the primitive equation I. the basic experiment, Monthly Weather Review, **91**, pp.99-164, 1963.
- 3) K.Iwamoto,Y.Suzuki and N.Kasagi: Reynolds number effect on wall turbulence, International Journal of Numerical Method for Heat and Fluid Flow, **23** pp.678-689, 2002.
- 4) T. E. Tezduyar: Stabilized finite element formulations for incompressible flow computations, Advance in Applied Mechanics, **28**, pp.1-44, 1992.