

$k - \varepsilon$ 型 2 方程式モデルに基づく等温場における風況解析

中央大学 学生員 ○岸 昌由
中央大学大学院 学生員 板橋 翔
中央大学 正会員 櫻山 和男

1. はじめに

近年、都市化に伴い森林公園や河川、湖沼などの冷熱源の減少や土地の被覆の変化、人口排熱量の増加が原因でヒートアイランド現象に代表されるような、都市固有の気候変化が顕著になり、大気汚染や粉塵公害等の問題が生じてきている。このような背景の下、数値解析により大気環境の変化を予測し捉えることは重要であると考えられる。また、都市の数値解析を行う際にビルや地形等の任意複雑形状を考慮する必要があるため、任意複雑形状への適合性に優れた有限要素法は有効な手法であると考えられる。

そこで本研究では、等温場における複雑乱流場の風況解析手法の構築を目的とし、 $k - \varepsilon$ 型 2 方程式モデルを安定化有限要素法に適用した。数値解析例として 2 次元角柱周流れ解析を取り上げ、既存の実験値¹⁾、解析値^{2) 3)} との比較を行うことにより、本手法の精度の検証、並びに既往の改良 $k - \varepsilon$ モデル^{3) 4)} の有効性の検討を行った。

2. 数値解析手法

(1) 基礎方程式

等温場における非圧縮粘性流体を考え、乱流モデルには $k - \varepsilon$ 型 2 方程式モデルを使用する。アンサンブル平均を施された運動方程式、連続式、乱流エネルギー k の輸送方程式、エネルギー散逸率 ε の輸送方程式はそれぞれ式 (1) ~ (4) のように表される。

運動方程式；

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{2}{3} \frac{\partial k}{\partial x_i} - \left(\frac{1}{Re} + \nu_T \right) \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) = 0 \quad (1)$$

連続式；

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2)$$

乱流エネルギー k の輸送方程式；

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \bar{u}_i \frac{\partial k}{\partial x_i} - \frac{\nu_T}{\sigma_k} \frac{\partial^2 k}{\partial x_j^2} - P_k + \varepsilon = 0 \quad (3)$$

エネルギー散逸率 ε の輸送方程式；

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \bar{u}_i \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} - \frac{\nu_T}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x_j^2} - (C_{\varepsilon 1} P_k - C_{\varepsilon 2} \varepsilon) \frac{\varepsilon}{k} = 0 \quad (4)$$

$$\bar{S}_{ij} = \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right)^2} \quad \bar{\Omega}_{ij} = \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right)^2}$$

ここで、 $\bar{u}_i$ 、 $\bar{p}$ はそれぞれアンサンブル平均を施した流速、圧力を示す。また、 k 、 ε はそれぞれ乱流エネルギー、エネルギー散逸率を示す。 Re は Reynolds 数を示し、 ν_T は渦動粘性係数を示す。式 (1) ~ (4) 中の定数はそれぞれ以下の通りである。

$$C_\mu = 0.09, \sigma_k = 1.0, \sigma_\varepsilon = 1.3$$

$$C_{\varepsilon 1} = 1.44, C_{\varepsilon 2} = 1.92$$

(2) 標準 $k - \varepsilon$ モデル

標準 $k - \varepsilon$ モデルは最も利用されているモデルで、渦動粘性係数 ν_T 、生産項 P_k を以下のように与える。

$$\nu_T = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}, P_k = \nu_T \bar{S}_{ij} \bar{S}_{ij}$$

(3) 修正 $k - \varepsilon$ モデル³⁾

風上側コーナーの乱流エネルギーの増大を改善するため、渦度スケールを導入したモデルで、 ν_T 、 P_k は以下のように与えられる。

$$\nu_T = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}, P_k = \nu_T \bar{S}_{ij} \bar{\Omega}_{ij}$$

(4) 改良 Launder-Kato(改良 LK) モデル⁴⁾

このモデルは村上らによって提案され、修正 $k - \varepsilon$ モデルの適用範囲を $\bar{\Omega}_{ij}/\bar{S}_{ij} \leq 1$ としている。

$$\nu_T = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad \begin{cases} P_k = \nu_T \bar{S}_{ij} \bar{\Omega}_{ij} & (\bar{\Omega}_{ij}/\bar{S}_{ij} \leq 1) \\ P_k = \nu_T \bar{S}_{ij} \bar{S}_{ij} & (\bar{\Omega}_{ij}/\bar{S}_{ij} > 1) \end{cases}$$

(5) 村上・持田・近藤 (MMK) モデル⁴⁾

このモデルは村上、持田、近藤によって提案され、渦動粘性係数の中の C_μ を $\bar{\Omega}_{ij}/\bar{S}_{ij}$ の関数としている。

$$\begin{cases} \nu_T = C_\mu^* \frac{k^2}{\varepsilon}, C_\mu^* = C_\mu \frac{\bar{\Omega}_{ij}}{\bar{S}_{ij}} & (\bar{\Omega}_{ij}/\bar{S}_{ij} \leq 1) \\ \nu_T = C_\mu^* \frac{k^2}{\varepsilon}, C_\mu^* = C_\mu & (\bar{\Omega}_{ij}/\bar{S}_{ij} > 1) \end{cases}$$

$$P_k = \nu_T \bar{S}_{ij} \bar{S}_{ij}$$

(6) 安定化有限要素法

本研究では、式 (1) ~ (4) に SUPG/PSPG 法に基づく安定化有限要素法⁵⁾を適用し、空間方向の離散化には P1/P1(流速・圧力 1 次) 要素を用いて補間を行い、時間方向の離散化には、2 次精度を有する Crank-Nicolson 法を利用した。移流項における移流速度 $\bar{u}_i$ は 2 次精度 Adams-Bashforth 法により近似した。なお、連続式、圧力は陰的に扱っている。連立一次方程式の解法には、Element-by-Element Bi-CGSTAB2 法を用いた。

KeyWords： 乱流，RANS， $k - \varepsilon$ 2 方程式モデル，安定化有限要素法

連絡先： 〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27 E-mail: d32427@educ.kc.chuo-u.ac.jp

3. 数値解析例

(1) 解析条件

解析領域を図 - 1 に、境界条件を表 - 1 に示す．解析に用いた有限要素分割は、総節点数 9994、総要素数 19512、最小分割幅 $0.05D$ とし、 $Re = 22000$ とした．微小時間増分量 $\Delta t = 0.001$ とした．なお、解析は前項で示した 4 つのモデルについて行った．

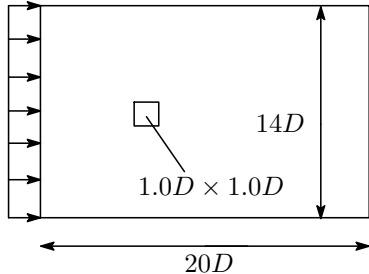


図 - 1 解析領域

表 - 1 境界条件

流入境界	$u = u_{in} = 1.0, v = 0.0, k = 0.028$ $\varepsilon = 0.009k^{3/2}l, l = 1.2$
側面	$v = 0.0, u, k, \varepsilon : \text{free}$
流出面	$u, v, k, \varepsilon : \text{free}$
角柱壁面	一般化対数則

ここで、一般化対数則は以下のように与えられる．

$$\frac{\bar{u}_{ip}}{\tau_w} \left(C_\mu^{1/2} k_p \right)^{1/2} = \frac{1}{k} \ln \left(\frac{E h_p \left(C_\mu^{1/2} k_p \right)^{1/2}}{\nu} \right)$$

$$\varepsilon = \frac{C_\mu^{3/4} k_p^{3/2}}{k h_p}$$

ここで、 u_{ip} 、 h_p 、 k_p 、 ε_p はそれぞれ壁面第一節点での接線方向での速度成分、壁面直行方向の幅、壁面第一節点での k 、壁面第一節点での ε_p を表す．また、 τ_w は壁面でのシアーストレスを表す．

(2) 解析結果

図 - 2 に本研究による乱流エネルギー k の分布を、図 - 3 に風軸方向の流速分布を示す．乱流エネルギー k の最大値は標準 $k - \varepsilon$ モデルで 0.498、修正 $k - \varepsilon$ モデルで 0.351、改良 LK モデルで 0.386、MMK モデルで 0.298 となっており、改良モデルの乱流エネルギー k の低減効果が確認できる．図 - 2 より修正 $k - \varepsilon$ モデル、MMK モデルは、乱流エネルギー k の分布に非対称性が確認できる．これは、この 2 つのモデルが他の 2 つのモデルに比べ、乱流エネルギーが小さいためと考えられる．また図 - 3 より標準 $k - \varepsilon$ モデルは実験値¹⁾と比較して、角柱後方で流速を過小評価していることがわかる．他の 3 つのモデルに関しては、角柱後方で流速を過大に評価していることが確認できる．角柱後方の流速を、標準 $k - \varepsilon$ モデルは坂本らの解析値（標準 $k - \varepsilon$ ）²⁾と、修正 $k - \varepsilon$ モデルは加藤の解析値（修正 $k - \varepsilon$ ）³⁾とそれぞれ比較すると、両モデルとも良い一致を示していることが確認できる．

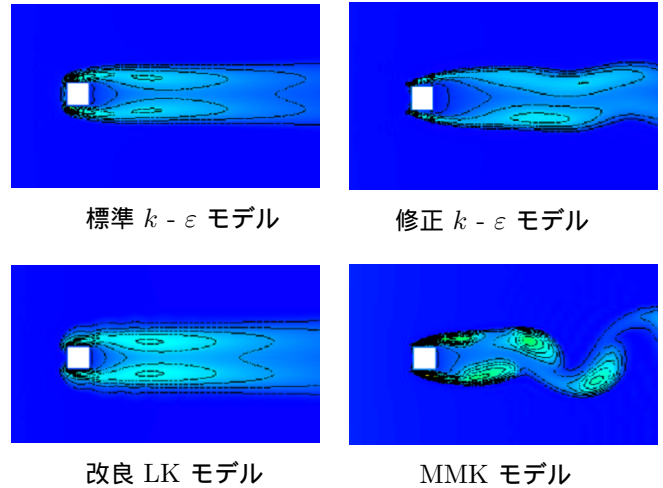


図 - 2 本報告による乱流エネルギー k の分布

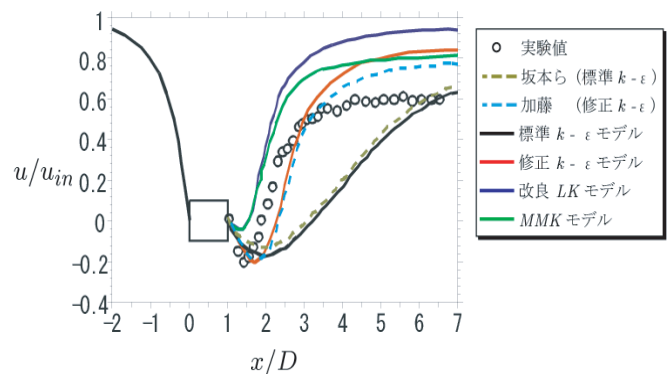


図 - 3 風軸方向の流速

4. おわりに

本研究では等温場における安定化有限要素法により、2 次元角柱周り流れ解析を行い、既存の実験値、解析値との比較することにより本手法の精度の検証を行い、以下の結論を得た．

- 角柱背後において、標準 $k - \varepsilon$ モデル、修正 $k - \varepsilon$ モデルとも既存の解析値と良い一致を示していることが確認できた．
- 改良 $k - \varepsilon$ モデルは、乱流エネルギー k の過大評価を低減させることが確認できた．

今後の課題としては、角点における接線方向の流速の評価、3 次元化の拡張が挙げられる．なお、角点の評価⁶⁾についての結果は当日講演にて発表する予定である．

参考文献

- 1) D.A.Lyn, S.Einav, W.Rodi and J.H.Park : *Journal of Fluid Mechanics*, **304** pp285-304, 1995.
- 2) 坂本成弘, 持田灯, 村上周三 : 東京大学生産技術研究所所報, 第 459 号, pp.49-56, 1994.
- 3) 加藤真志 : 名古屋大学学位論文, 1996.
- 4) 村上周三, 持田灯, 近藤宏二 : 東京大学生産技術研究所所報, 47 巻, pp.29-33, 1995.
- 5) T.E.Tezduyar : *Advances in Applied Mechanics*, **28**, pp.1-44, 1991.
- 6) 長谷部寛, 野村卓史 : 土木学会第 60 会年次学術講演会, pp.689-690, 2005.