第 33 回関東支部技術研究発表会

二次随伴方程式法を用いた制御問題に対する初期値依存性に関する検証

Verification of Dependency for Initial Control Value in Control Problem Using Second Order Adjoint Technique

○ 工修　中央大学大学院　理工学研究科土木工学専攻　学生会員　倉橋　貴彦
工博　中央大学教授　理工学部土木工学科　正会員　川原　睦人

Abstract ; This paper presents the verification of dependency for the initial control value in case that the control problem is solved by the quasi Newton method. The BFGS method is employed to obtain the Hessian matrix which is used in the quasi Newton method. In this research, the second order adjoint technique(1 is applied to obtain the Hessian matrix, and it is verified that the dependency for the set of initial control value in case that the second order adjoint technique applied to the quasi Newton method is employed.

1　序論

逆問題に対して二次随伴方程式法を適用することで「Hessian/Vector Products」を算出し，ニュートン法に基づいた最小化アルゴリズムを適用する場合，勾配法に比べ良好な収束性が得られるとされている．(1 ここでは，二次随伴方程式法を適用し「Hessian/Vector Products」を算出し，準ニュートン法を最小化アルゴリズムとして用いた場合，初期制御量の設定に関する依存性について検討を行う．

2　初期制御量に関する依存性

数値実験として，熱伝導制御問題を取り上げ，計算モデルを **Fig.1** に示す．有限要素メッシュ図を **Fig.2** に示す．総接点数は 33, 総要素数は 40 である．ここに本検討の目的は，目的点において対象とする温度となるような，制御境界における制御熱量を求めることである．また，対象とする温度は，計算前に設定されるものであり，本検討においてはゼロと設定している．問題を解くにあたり，評価関数を以下のように定義する．

$$J = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}\int_{\Omega} \Phi(t)^T Q \Phi(t)\, d\Omega\, dt, \qquad (1)$$

$$\Phi(t) = \phi(t) - \phi_{Target}(t) \qquad (2)$$

ここに $\phi(t)$ は計算で求まった温度，Q は重み定数，$\phi_{Target}(t)$ は対象とする温度を示す．また，状態量を算定する方程式として，以下に示す熱伝導方程式を状態方程式として導入する．

$$\dot{\phi}(t) - \kappa\phi(t)_{,ii} = 0 \quad \text{in} \quad \Omega \quad t\in[t_0, t_f]. \qquad (3)$$

キーワード：二次随伴方程式法, 準ニュートン法
〒 112-8551 東京都文京区春日 1-13-27 中央大学 理工学部 土木工学科，TEL 03-3817-1814，FAX 03-3817-1803

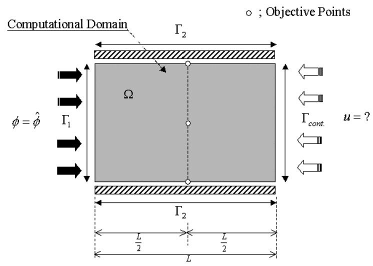

Figure 1: 計算モデル (熱伝導制御問題)

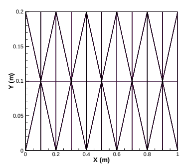

Figure 2: 有限要素メッシュ図

ここに $\phi(t)$ は温度，κ は熱伝導係数を表す．

Fig.1 に示す計算モデルにおいて，左側の境界では以下に示す第 1 種境界条件 $\phi(t)$ を与えることとする．

$$\phi(t) = sin\Big(\frac{2\pi t}{T}\Big)+sin\Big(\frac{3\times 2\pi t}{T}\Big)+sin\Big(\frac{9\times 2\pi t}{T}\Big) \quad \text{on} \quad \Gamma_1 \quad t\in[t_0, t_f]. \qquad (4)$$

ここに t は実時間を表し，T は正弦波の周期を表す．また，初期制御熱量 $u(t)$ はゼロと設定する．ここでは，左側の境界において正弦波を与えているため，最終的には右側の境界において負の正弦波で表される制御熱量が求まるはずである．計算条件は，熱伝導係数 κ は $0.002(m^2/sec)$, 時間増分量 Δt は $1.0(sec)$, 正弦波の周期 T は $4000(sec)$, タイムステップ数は 4000, 重み定数 Q は 1.0, 対象温度 ϕ_{Target} は 0.0 および収束判定定数 ϵ は 10^{-6} と設定する．

ここで制御熱量 $u(t)$ について考えると，境界 Γ_1 および $\Gamma_{cont.}$ の中間線上において目標とする温度をゼロと設定し

ているため，最適解である制御熱量 $u(t)$ は下式のように与えられることが理想である．

$$u(t) = -1.0 \times \phi(t) \quad \text{on} \quad \Gamma_{cont.} \quad t \in [t_0, t_f], \qquad (5)$$

初期制御熱量に対する得られる制御熱量の依存性を検証するために，以下の三ケースの初期制御熱量の条件について検討を行う．

$$\begin{cases} CASE1: & u^{(0)}(t) = -0.1 \times \phi(t), \\ CASE2: & u^{(0)}(t) = -0.5 \times \phi(t), \\ CASE3: & u^{(0)}(t) = -0.9 \times \phi(t). \end{cases} \qquad (6)$$

計算結果を **Fig.3**〜**Fig.8** に示す．評価関数の収束状況を **Fig.3** に示し，評価関数の値が「0.0〜0.1」の区間における拡大図を **Fig.4** に示す．全てのケースで検証を行った結果，最も最適解に近い初期制御熱量の条件を与えたケース 3 が，評価関数の値を最も下げることができた．制御熱量の時系列変化を **Fig.5** に示し，「500 秒〜1500 秒」の区間における拡大図を **Fig.6** に示す．初期制御熱量を序々に最適解に近づけると，それに伴い得られる制御温度は序々に最適解に近づいていることが解かる．目的点における温度の時系列変化を **Fig.7** に示し，温度が「-0.2〜0.2」の区間の拡大図を **Fig.8** に示す．同様に，初期制御熱量を序々に最適解に近づけることで，目的点における温度も対象とする温度に近づけることができる．以上の結果より，二次随伴方程式法を用いた準ニュートン法を最小化手法として適用する場合においても，ニュートン法の欠点を脱却することは難しいと考えられるため，初期制御量の条件の設定に関しては，想定される制御量を初期制御量と設定し検討を行う等，留意する必要がある．

参考文献

1. ZHI Wang, I.M.Navon, X.Zou and F.X.Le Dimet; A Truncated Newton Optimization Algorithm in Meteorology Applications with Analytic Hessian/Vector Products, *Computational Optimization and Applications*, **4**, 241-262, 1995

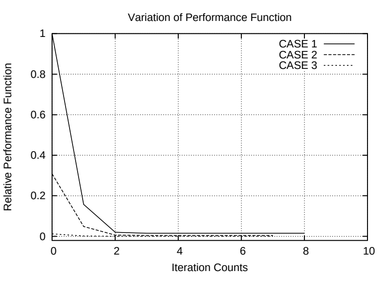

Figure 3: 評価関数の収束状況

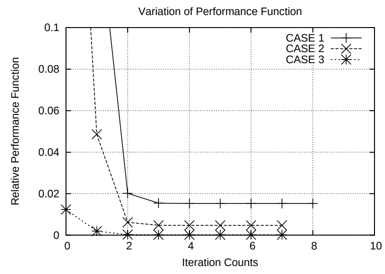

Figure 4: 評価関数の収束状況 (拡大図)

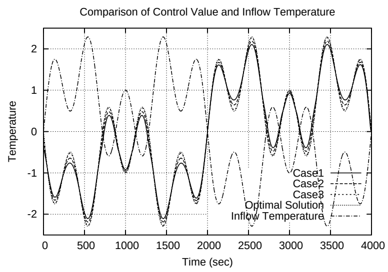

Figure 5: 制御熱量および境界条件の時系列変化

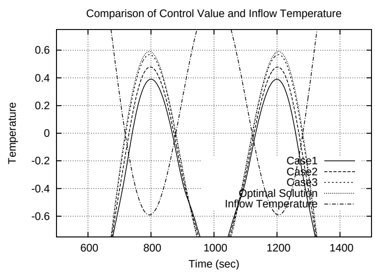

Figure 6: 制御熱量および境界条件の時系列変化 (拡大図)

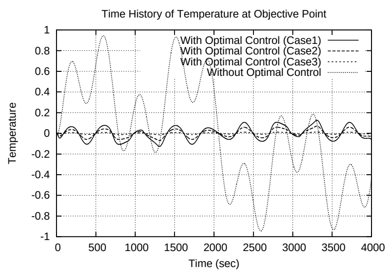

Figure 7: 目的点における温度の時系列変化

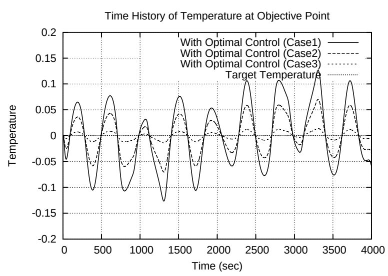

Figure 8: 目的点における温度の時系列変化 (拡大図)